వృత్తం

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. **వృత్త కేంద్రం C, వ్యాసార్థాలు r లు క్రింద ఇచ్చాం, C కేంద్రంగా, r వ్యాసార్థంగా ఉంటే వృత్తాల సమీకరణాలను కనుక్కోండి.**

i. $C = (2, -3),\ r = 4$

A. కలిగిన వృత్త సమీకరణము కేంద్రం (h,k) వ్యాసార్థం r

$$\Rightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$\Rightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = 16$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 3 = 0$$

ii. $C = (-a, -b)\ ; r = \sqrt{a^2 - b^2}$

A. వృత్త సమీకరణము

$$(x+a)^2 + (y+b)^2 = \left[\sqrt{a^2 - b^2}\right]^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xa + 2yb + a^2 + b^2 = a^2 - b^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2xa + 2yb + 2b^2 = 0$$

iii. $C = (\cos\alpha, \sin\alpha)\ ; r = 1$

A. వృత్త సమీకరణము

$$\left(x - \cos\alpha^2\right) + (y - \sin\alpha)^2 = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2x\cos\alpha - 2y\sin\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$x^2 + y^2 - 2x\cos\alpha - 2y\sin\alpha = 0$$

www.sakshieducation.com

2. $(2,3)$ కేంద్రంగా ఉంటూ $(2,-1)$గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. $C=(2,3),\ P=(2,-1)$

వ్యాసార్థము $C\{=\sqrt{(2-2)^2+(3+1)^2}=4$

వృత్త సమీకరణము

$(x-2)^2+(y-3)^2=4^2$

$x^2+y^2-4x-6y-3=0$

3. $ax^2+bxy+3y^2-5x+2y-3=0$ వృత్తాన్ని సూచిస్తే a, b ల విలువలు కనుక్కోండి. ఇంకా దీని వ్యాసార్థం, కేంద్రం కనుక్కోండి.

A. $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ సమీకరణము

$a=b,\ h=0$

$ax^2+bxy+3y^2-5x+2y-3=0$ వృత్తాన్ని సూచిస్తోంది కావున

$\therefore b=0,\ a=3$

$3x^2+3y^2-5x+2y-3=0$

$x^2+y^2-\frac{5}{3}x+\frac{2}{3}y-1=0$

$g=-\frac{5}{6};\ f=\frac{2}{6};\ c=1$

$C=(-g,-f)=\left(\frac{5}{6},-\frac{1}{3}\right)$

వ్యాసార్థము $=\sqrt{g^2+f^2-c}=\sqrt{\frac{25}{36}+\frac{1}{9}+1}$

$=\frac{\sqrt{65}}{6}$ యూనిట్లు

www.sakshieducation.com

4. $x^2+y^2+2gx+2fy-12=0$ **సమీకరణం** $(2,3)$ **కేంద్రంగా ఉండే వృత్తాన్ని సూచిస్తే, g, f లను, వృత్త వ్యాసార్థమును కనుక్కోండి.**

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2+2gx+2fy-12=0$

కేంద్రం $C=(-g,-f)=(2,3)$

కనుక $g=-2, f=-3, c=-12$

$\therefore$ వృత్త వ్యాసార్థం $(r)=\sqrt{g^2+f^2-c^2}$

$=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+12}$

$=\sqrt{4+9+12}=\sqrt{25}=5$ యూనిట్లు

5. $x^2+y^2-4x+6y+c=0$ **వృత్త వ్యాసార్థం '6' అయితే 'c' విలువ కనుక్కోండి.**

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-4x+6y+c=0$

ఇచ్చుట $2g=-4, 2f=6, c=c$

$\Rightarrow g=-2, f=3, c=c$

$\therefore$ వృత్త వ్యాసార్థం $(r)=6$

$\Rightarrow \sqrt{g^2+f^2-c}=6$

$\Rightarrow \sqrt{(-2)^2+(3)^2-c}=6$

$\Rightarrow 13-c=6^2$

$\Rightarrow c=13-36=-23$

www.sakshieducation.com

6. $3x^2+3y^2-5x-6y+4=0$ వృత్తం యొక్క కేంద్రం , వ్యాసార్ధాలను కనుగొనుము

A. వృత్త సమీకరణము $3x^2+3y^2-5x-6y+4=0$

$$\Rightarrow g=-\frac{5}{6};\ f=-1;\ C=\frac{4}{3}$$

$\therefore$ వృత్త కేంద్రం $C=(-g,-f)=\left(\frac{5}{6},1\right)$

వ్యాసార్థం $(r)=\sqrt{g^2+f^2-c}$

$$=\sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2+(-1)^2-\frac{4}{3}}$$

$$=\sqrt{\frac{25}{36}+1-\frac{4}{3}}$$

$$=\sqrt{\frac{25+36-48}{36}}=\sqrt{\frac{13}{36}}$$

$=\frac{1}{6}\sqrt{13}$ యూనిట్లు

7. $(1,2),(4,6)$ బిందువు జతలు వ్యాసాగ్రాలుగా గల వృత్త సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

A. $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ లు వ్యాసాగ్రాలుగా గల వృత్త సమీకరణము

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

$$\Rightarrow(x-1)(x-4)+(y-2)(y-6)=0$$

$$\Rightarrow x^2-5x+4+y^2-8y+12=0$$

$$\Rightarrow x^2+y^2-5x-8y+16=0$$

www.sakshieducation.com

8. క్రింది ఇచ్చిన వృత్తాలలోని ప్రతి వృత్తానికి పరామితీయ సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

i. $x^2 + y^2 = 4$

A. $C(0,0),\ r = 2$

పరామితీయ సమీకరణాలు

$x = -g + r\cos\theta = 2\cos\theta$

$y = -b + r\sin\theta = 2\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

ii. $4(x^2 + y^2) = 9$

A. ఇచ్చిన వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 = \frac{9}{4}$

$C(0,0), r = \frac{3}{2}$

పరామితీయ సమీకరణాలు

$x = \frac{3}{2}\cos\theta,\ y = \frac{3}{2}\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

iii. $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 8^2$

A. కేంద్రం $(3,4), r = 8$

పరామితీయ సమీకరణాలు

$x = x_1 + r\cos\theta,\ y = y_1 + r\sin\theta$

$x = 3 + 8\cos\theta,\ y = 4 + 8\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

iv. $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$

A. కేంద్రం $(2,3),\ r = \sqrt{4+9+12} = 5$

పరామితీయ సమీకరణాలు

$x = 2 + 5\cos\theta,\ y = 3 + 5\sin\theta,\ 0 \le \theta \le 2\pi$

www.sakshieducation.com

9. క్రింద ఇచ్చిన ప్రతి వృత్తం దృష్ట్యా $S = 0$ బిందువు **P** శక్తి కనుక్కోండి.

i. $P = (5, -6)$, మరియు $S \equiv x^2 + y^2 + 8x + 12y + 15$

A. బిందు శక్తి = S_{11}

$= 25 + 36 + 40 - 72 + 15 = 116 - 72 = 44$

10. క్రింద ఇచ్చిన బిందువు **P** నుంచి **S = 0** వృత్తానికి గల స్పర్శరేఖ పొడవును కనుక్కోండి.

i. $P = (-2, 5)$ మరియు $S \equiv x^2 + y^2 - 25$

A. స్పర్శరేఖ పొడవు = $\sqrt{S_{11}}$

$= \sqrt{(-2)^2 + (5)^2 - 25}$

= 2 యూనిట్లు

11. క్రింద ఇచ్చిన ప్రతి **S = 0** వృత్తానికి **P** వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

i. $P - (7, -5)$, $S \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12$

A. వృత్త సమీకరణము

$S \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

$P - (7, -5)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$S_1 = xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0$

$\Rightarrow x.7 + y(-5) - 3(x + 7) + 2(y - 5) - 12 = 0$

$\Rightarrow 7x - 5y - 3x - 21 + 2y - 10 - 12 = 0$

$4x - 3y - 43 = 0$

www.sakshieducation.com

12. క్రింద ఇచ్చిన **S = 0** వృత్తానికి **P** వద్ద అభిలంబరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

i. $P(3,-4)$, $S \equiv x^2 + y^2 + x + y - 24$

A. అభిలంబరేఖ సమీకరణము

$$(x-x_1)(y_1+f)-(y-y_1)(x_1+g)=0$$

$$(x-3)\left(-4+\frac{1}{2}\right)-(y+4)\left(3+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$-\frac{7}{2}(x-3)-\frac{7}{2}(y+4)=0$$

$$\Rightarrow (x-3)+(y+4)=0$$

$$x-3+y+4=0$$

$$x+y+1=0$$

13. బిందువు $(5,4)$ నుంచి $x^2+y^2+2ky=0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖ పొడవు **1** అయితే **k** విలువను కనుక్కోండి.

A. $S \equiv x^2+y^2+2ky=0,\ ;\ P(5,4)$

స్పర్శరేఖ పొడవు

$$\sqrt{S_{11}}=\sqrt{(5)^2+(4)^2+8k}$$

స్పర్శరేఖ పొడవు = 1 కనుక

$$\therefore\ 1=\sqrt{215+16+8k}$$

వర్గీకరించగా $1=41+8k$

$k=-5$ యూనిట్లు

www.sakshieducation.com

14. బిందువు $(2,5)$ నుంచి $x^2+y^2-5x+4y+k=0$ కు గల స్పర్శరేఖ పొడవు $\sqrt{37}$ అయితే **k** విలువను కనుక్కోండి.

A. స్పర్శరేఖ పొడవు = $\sqrt{S_{11}}$

= $\sqrt{(2)^2+(5)^2-5\times2+4\times5+k}$

= $37=39+k$

$k=-2$ యూనిట్లు

15. $x^2+y^2-2x+2y+1=0$ వృత్తం దృష్ట్యా $(-6,1),(2,3)$ లు సంయుగ్మ బిందువులని చూపండి.

A. S = 0 వృత్తం దృష్ట్యా $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$ సంయుగ్మాలైన $S_{12}=0$

కనుక ఇచ్చుట వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-2x+2y+1=0$

బిందువులు $P(-6,1),Q(2,3)$

ఇప్పుడు

$S_{12}=x_1x_2+y_1y_2+g(x_1+x_2)+f(y_1+y_2)+c$

= $(-6)(2)+(1)(3)+(-1)(-6+2)+1(1+3)+1$

= $-12+3+4+4+1=-12+12=0$

$\because S_{12}=0$

$\Rightarrow$ వృత్తం దృష్ట్యా దత్త బిందువులు సంయుగ్మ బిందువులు

16. $x^2+y^2-2x-2y-1=0$ వృత్తం దృష్ట్యా $x+y-5=0, 2x+ky-8=0$ లు సంయుగ్మ రేఖలయితే k విలువ కనుక్కోండి.

A. If $l_1x+m_1y+n_1=0$; $l_2x+m_2y+n_2=0$, S = 0 దృష్ట్యా సంయుగ్మ రేఖలయితే

$r^2(l_1l_2+m_1m_2)$

= $(l_1g+m_1f-n_1)(l_2g+m_2f-n_2)$

$l_1=1,\ m_1=1,\ n_1=-5$

$l_2=2,\ m_2=k,\ n_1=-8$

www.sakshieducation.com

$g=-1,\ f=-1, r^2=3$

$\therefore 3(1.2+k)=(-1-1+5)(-2-k+8)$

$6k=18-6=12 \Rightarrow k=2$

17. $x^2+y^2-5x+8y+6=0$ వృత్తం దృష్ట్యా $(4,2),(k,-3)$ లు సంయుగ్మ రేఖలయితే k విలువ ఎంత ?

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2-5x+8y+6=0$

ధృవరేఖ $(4,2)$

$$x.4+y.2-\frac{5}{2}(x+4)+4(y+2)+6=0$$

$8x+4y-5x-20+8y+16+12=0$

$3x+12y+8=0$

$P(4,2),Q(k,-3)$ లు సంయుగ్మాలు

P యొక్క ధృవరేఖ Q గుండా పోతుంది

$\therefore 3k-36+8=0\ 3k=28 \Rightarrow k=\frac{28}{3}$

18. $S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ వృత్తానికి $(0,0)$ నుంచి గీసిన స్పర్శరేఖలు లంబంగా ఉండటానికి నియమం కనుక్కోండి.

A. **P** నుంచి వృత్తానికి గీయబడిన స్పర్శరేఖలు వృత్త కోణము **0**

అయితే $\frac{\theta}{2}=\frac{r}{\sqrt{S_{11}}}$

$$\tan 45° = \frac{\sqrt{g^2+f^2-c}}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}}$$

$$1=\frac{\sqrt{g^2+f^2-c}}{\sqrt{0+0+0+0+c}}$$

$g^2+f^2-c=c$

www.sakshieducation.com

$g^2 + f^2 = 2c$

ఇది కావలసిన నియమము

19. క్రింది వృత్తాల జతలకు ఎన్ని ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు గీయవచ్చునో తెలపండి.

i. $x^2 + y^2 + 6x + 6y + 14 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 4 = 0$

A. $c_1(-3,-3)$, $c_2 = (1,2)$

$r_1 = \sqrt{9+9-14} = 2$

$r_2 = \sqrt{1+4+40} = 0$

$c_1, c_2 = \sqrt{(-3-1)^2 + (-3-2)^2}$

$= \sqrt{16+25} = \sqrt{41} > r_1 + r_2$

ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల సంఖ్య $= 4$

www.sakshieducation.com

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $(3,2)$ బిందువు నుంచి $x^2+y^2-6x+4y-2=0$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శరేఖల మధ్య కోణం కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$$S \equiv x^2 + y^2 - 6x + 4y - 2 = 0$$

$$r = \sqrt{9+4+2} = \sqrt{15}$$

$$S_{11} = 9 + 4 - 18 + 8 - 2 = 1$$

$$\tan\theta = \frac{4}{\sqrt{S_{11}}} = \sqrt{15}$$

$$\cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \frac{1-15}{1-16} = -\frac{7}{8}$$

P వద్ద స్పర్శరేఖల మధ్య కోణము $\cos^{-1}\left(\frac{7}{8}\right)$

2. $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$ దృష్ట్యా $(1,-2)$ యొక్క ధ్రువరేఖా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2-10x-10y+25=0$

దృవరేఖ సమీకరణము $S_1 = 0$

$P(1,-2)$ యొక్క దృవరేఖ

$$x.1 + y(-2) - 5(x+1) - 5(y-2) + 25 = 0$$

$$x - 2y - 5x - 5 - 5y + 10 + 25 = 0$$

$$-4x - 7y + 30 = 0$$

$$4x + 7y - 30 = 0$$

www.sakshieducation.com

3. $A(3,-1)$ బిందువు $x^2+y^2-2x+4y=0$ వృత్తం పై బిందువని చూపి, A ద్వారా పోయే వ్యాసం రెండవ చివరి బిందువులను కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-2x+4y=0$ .... (i)

$A(3,-1)$; $B(x_1,y_1)$

(i) లో A ప్రతిక్షేపించగా

$(3)^2+(-1)^2-2(3)+4(-1)=0$

$\therefore A$ వృత్తం మీద ఉన్నది

$C=(1,-2)$

C వృత్త కేంద్రం

AB మధ్య బిందువు

$\frac{x_1+3}{2}=1$ $\quad\quad$ $\frac{y_1-1}{2}=-2$

$x_1=-1$ $\quad\quad$ $y_1=-3$

$B(x_1,y_1)=(-1,-3)$

4. $(2,-3),(-4,5)$ బిందువుల గుండా పోయే వృత్త కేంద్రం $4x+3y+1=0$ రేఖపై ఉంటే ఆ వృత్త సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

A. $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ .... (i)

సమీకరణము (i) $(2,-3),(-4,5)$ ల గుండా వృత్తం పోతుంది

$\therefore 4+9+4g-6f+c=0$ .... (ii)

$16+25-8g+10f+c=0$ ....(iii)

(iii) - (ii) చేయగా

$28-12g+16f=0$

(లేదా) $3g-4f=7$

కేంద్రం $(-g,-f)$ రేఖ $4x+3y+1=0$ మీద ఉంది

www.sakshieducation.com

$\therefore 4(-g)+3(-f)+1=0$

$3g-4f-7=1$

సాధించగా $f=-1$

$g=1$

(ii) లో $f,\ g$ విలువలు ప్రతిక్షేపించగా

$4+9+4(1)-6(-1)+c=0,\ c=-23$

$x^2+y^2+2x-2y-23=0$ ఇది కావలసిన వృత్త సమీకరణము

5. $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ వృత్తంలో సకేంద్రీయమై $(-2,14)$ బిందువు గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. $x^2+y^2-6x-4y-12=0$ .... (i)

$C=(-g,-f)$

$=(3,2)$

(i) లోని సకేంద్రీయ వృత్త సమీకరణము

$(x-3)^2+(y-2)^2=r^2$

$(-2,14)$ గుండా పోతుంది

$\therefore (-2,-3)^2+(14-2)^2=r^2$

$169=r^2$

కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$(x-3)^2+(y-2)^2=169$

$x^2+y^2-6x-4y-156=0$

www.sakshieducation.com

6. వృత్త కేంద్రం X - అక్షం పై ఉంటూ $(-2,3),(4,5)$ బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ .... (i)

దాని కేంద్రం $C=(-g,-f)$, X - అక్షం పై ఉన్నది కనుక $f=0$ .... (1)

$\therefore$ వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

ఇది $(-2,3),(4,5)$ ల గుండా పోతుంది కనుక

$(-2)^2+(3)^2+2g(-2)+c=0$

$\Rightarrow -4g+c=-13$ .... (2)

$(4)^2+(5)^2+2g(4)+c=0$

$\Rightarrow 8g+c=-41$ .... (3)

$\underline{-4g+c=-13}$ .... (2)

$12g=-28 \Rightarrow g=-\frac{7}{3}$

(ii) నుండి $-4\left(-\frac{7}{3}\right)+c=-13$

$c=-13-\frac{28}{3}=\frac{-39-28}{3}=\frac{-67}{3}$

$\therefore$ కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2+\left(-\frac{7}{3}\right)x+2(0)y+\left(\frac{-67}{3}\right)=0$

$\Rightarrow 3x^2+3y^2-14x-67=0$

www.sakshieducation.com

7. $x^2+y^2-5x+8y+6=0$ వృత్తానికి $x-2y+22=0$ ఒక ధ్రువరేఖ అయితే దీని ధ్రువాన్ని కనుక్కోండి.

A. ధ్రువం $P(x_1, y_1)$ అనుకుందాం

దృవరేఖ సమీకరణము $S_1 = 0$

$$xx_1 + yy_1 - \frac{5}{2}(x+x_1) + 4(y+y_1) + 6 = 0$$

(లేదా) $x\left(x_1 - \frac{5}{2}\right) + y(y_1+4) - \frac{5}{2}$

$x_1 + 4y_1 + 6 = 0$ .... (i)

$x - 2y + 22 = 0$ .... (ii)

(i), (ii) లు ఒకే రేఖను సూచిస్తున్న

$$\frac{x_1 - \frac{5}{2}}{1} = \frac{y_1+4}{-2} = \frac{\frac{-5}{2}x_2 + 4y_1 + 6}{22} = k$$

$$x_1 - \frac{5}{2} = k \Rightarrow x_1 = k + \frac{5}{2}$$

$$-\frac{5}{2}x_1 + 4y_1 + 6 = 22k$$

$y_1 - 2k - 4$,

$$-\frac{5}{2}\left(k+\frac{5}{2}\right) + 4(-2k-4) + 6 = 22k \;;$$

$$-\frac{5}{2} - \frac{25}{4} - 8k - 16 + 6 = 22k$$

$$-\frac{65}{4} = 30k + \frac{5k}{2} = \frac{65k}{2}$$

$$k = -\frac{1}{2} \;;\; x_1 = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 2$$

$y_1 = -3$

$\therefore$ ధ్రువము $(2,-3)$

www.sakshieducation.com

8. $x^2+y^2=b^2$ వృత్తం దృష్ట్యా $x^2+y^2=a^2$ వృత్తం పై ఉండే బిందువు ధృవరేఖలు $x^2+y^2=c^2$ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తే a, b, c లు గుణశ్రేణిలో ఉంటాయిని చూపండి.

A. $P(x_1, y_1)$ బిందువు మీది బిందువు $x^2+y^2=a^2$

$\therefore x_1^2+y_1^2=a^2$ .... (1)

$x^2+y^2=b^2$ దృష్ట్యా P యొక్క ధ్రువరేఖ

$xx_1+yy_1=b^2$ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ

$x^2+y^2=c^2$

$$\frac{|0+0-b^2|}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}}=c \Rightarrow \frac{b^2}{a}=c$$

అడ్డ గుణకారం చేయగా $b^2=ac$

$\therefore a,b,c$ లు G.P లో ఉన్నాయి

9. $x^2+y^2-6x-2y+1=0$, $x^2+y^2+2x-8y+13=0$ వృత్తాలు పరస్పరం స్పృశిస్తాయని చూపిస్తూ, స్పర్శ బిందువును, ఆ బిందువు దగ్గర దత్త వృత్తాలను ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖ సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

A. వృత్త కేంద్రాలు $C_1=(3,1), C_2=(-1,4)$

వాటి వ్యాసార్థాలు $r_1=\sqrt{9+1-1}=3$

$r_2=\sqrt{1+16-13}=\sqrt{4}=2$

$C_1C_2=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$

$\because C_1 C_2=r_1+r_2$

$\Rightarrow$ రెండు వృత్తాలు బాహ్యంగా స్పృశించుకుంటాయి

స్పర్శ బిందువు P అనుకుంటే, P బిందువు $C_1 C_2$ రేఖాఖండాన్ని అంతరంగా $r_1 : r_2$ (i.e.,) 3 : 2 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. కనుక

$$P=\left(\frac{3(-1)+2(3)}{5}, \frac{3(4+2(1))}{5}\right)$$

www.sakshieducation.com

$= \left(\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right)$

P వద్ద ఏదేని ఒక వృత్తానికి గీచిన స్పర్శరేఖయే ఉమ్మడి స్పర్శరేఖ అవుతుంది

$\therefore P\left(\frac{3}{5}, \frac{14}{5}\right) \quad x^2 + y^2 - 6x - 2y + 1 = 0$

వృత్తానికి స్పర్శరేఖా సమీకరణము

$S_1 = 0$

(i.e.,) $x\left(\frac{3}{5}\right) + y\left(\frac{14}{5}\right) - 3\left(x + \frac{3}{5}\right)$

$-1\left(y + \frac{14}{5}\right) + 1 = 0$

$\Rightarrow 2x + 14y - 15x - 9 - 5y - 14 + 5 = 0$

$\Rightarrow -12x + 9y - 18 = 0$

$4x - 3y + 6 = 0$

10. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ **వృత్తాన్ని** $(5,5)$ **బిందువు వద్ద బాహ్యంగా స్పృశిస్తూ 5 యూనిట్ల వ్యాసార్థం ఉన్న వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.**

A. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

$C = (1, 2)$

$r = \sqrt{1 + 4 + 20} = 5$

$\frac{h+1}{2} = 5, \frac{k+2}{2} = 5$

$h = 9 \quad k = 8$

వృత్త సమీకరణము

$(x-9)^2 + (y-8)^2 = 25$

$x^2 + y^2 - 18x - 16y + 120 = 0$

కావలసిన వృత్త కేంద్రం (h,k) అయితే $(3,2)$ మరియు (h,k) ల మధ్య బిందువు $(5,5)$

www.sakshieducation.com

11. $x^2+y^2-4x-6y+9=0$ వృత్తం దృష్ట్యా $(1,2)$ విలోమ బిందువును కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2-4x-6y+9=0$

కేంద్రము $C(2,3)$

$P(1,2)$ దత్త బిందువు P యొక్క విలోమ బిందువు Q అయితే P నుండి దాని ధృవరేఖ మీదకు గీయబడిన లంబపాదము Q

P ధృవరేఖ

$$x.1+y.2-2(x+1)-3(y+2)+9=0$$

$$x+2y-2x-2-3y-6+9=0$$

$$-x-y+1=0 \Rightarrow x+y-1=0$$

Q నిరూపకాలు

$$\left(x_1-\frac{a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2},\ y_1-\frac{b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}\right)$$

$$x_1-\frac{a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}=1-\frac{1(1+2-1)}{1+1}$$

$$=1-\frac{2}{2}=1-1=0$$

$$y_1=\frac{b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}=2-\frac{1(1+2-1)}{1+1}$$

$$=2-1=1$$

P యొక్క విలోమ బిందువు $Q(0,1)$

12. $x^2+y^2+ax+by-12=0$ వృత్త కేంద్రం $(2,3)$ అయితే a, b దీని వ్యాసార్ధం విలువలు కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2+ax+by-12=0$

$$\text{కేంద్రము} = \left(-\frac{a}{b},-\frac{b}{2}\right)=(2,3)$$

$$-\frac{a}{2}=2 \qquad\qquad -\frac{b}{2}=3$$

www.sakshieducation.com

$a = -4 \qquad b = -6$

$g = -2,\ f = -3,\ c = -12$

వ్యాసార్థము $= \sqrt{g^2 + f^2 - c} = \sqrt{4+9+12} = 5$

13. $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$ వృత్తం పై ఉన్న $30°, 60°$ బిందువులను కలిపే జ్యా సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$

θ_2, θ_1 బిందువులను కలిపే జ్యా సమీకరణము

$$(x+g)\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2} + (y+f)\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$$= r.\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$

$r = \sqrt{9+4+12} = 5$

$(x-3).\cos 45° + (y-2)\sin 45° = 5.\cos 15°$

$$\frac{(x-3)+(y+2)}{\sqrt{2}} = \frac{5\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{2}}$$

(i.e.,) $2(x+y-1) = 5\sqrt{3}+5$

$2x + 2y - \left(7+5\sqrt{3}\right) = 0$

14. $x^2 + y^2 + 4x + 6y - 39 = 0$ పై బిందువు $30°$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 + 4x + 6y - 39 = 0$

$g = 2,\ f = 3,\ r = \sqrt{4+9+39} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$\theta = 30°$

స్పర్శరేఖ సమీకరణము

www.sakshieducation.com

$$(x+g)\cos 30° + (y+f)\sin 30° = r$$

$$(x+2)\frac{\sqrt{3}}{2} + (y+3).\frac{1}{2} = 2\sqrt{13}$$

$$\sqrt{3}x + 2\sqrt{3} + y + 3 = 4\sqrt{13}$$

$$\sqrt{3}x + y + \left(3 + 2\sqrt{3} - 4\sqrt{13}\right) = 0$$

దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

1. క్రింద ఇచ్చిన బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

i. $(3,4);(3,2);(1,4)$

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకోండి

దత్త బిందువులు వృత్తం మీద ఉన్నాయి కనుక

$9 + 16 + 6g + 8f + c = 0$ .... (i)

$9 + 4 + 6g + 4f + c = 0$.... (ii)

$1 + 16 + 2g + 8f + c = 0$ .... (iii)

(ii) నుండి (i) తీసివేయగా

$-12 - 4f = 0$ (లేదా) $f = -3$

(ii) నుండి (iii) తీసివేయగా

$-4 + 4g - 4f = 0$

$g - f = 1 \Rightarrow g = -2$

(i) లో g, f ల విలువలు ప్రతిక్షేపించగా

$25 + 6(-2) + (-3) + c = 0$

$c = 11$

www.sakshieducation.com

కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-4x-6y+11=0$

ii. $(1,2);(3,4);(5,6)$

A. వృత్త సమీకరణము

దత్త బిందువును ప్రతిక్షేపించగా

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ అనుకోండి

$1+4+2g+4f+c=0$ .... (i)

$9+15+6g-8f+c=0$ .... (ii)

$25+36+10g-12f+c=0$ .... (iii)

(ii) - (i) చేయగా

$29+4g-12f=0$

$5+g-3f=0$ .... (iv)

(iii) - (ii) చేయగా

$36+4g-4f=0$

(లేదా) $9+g-f=0$ .... (v)

(v) మరియు (iv) ను సాధించగా

$f=-2, g=-11, c=25$

కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-22x-4y+25=0$

2. $(0,0)$ గుండా పోతూ X, Y - అక్షాల పై వరుసగా 4, 3 అంతర ఖండాలు చేసే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ అనుకోండి

$(0,0),(4,0)$ మరియు $(0,3)$ ల గుండా వృత్తం పోతుంది

$0+0+2g(0)+2f(0)+c=0$

$c=0$

$16+0+8g+2f.0+c=0$

www.sakshieducation.com

$c=0$ కనుక $g=-2$

ఇదే విధంగా $0+9+2g.0+6f+c=0$

$f=-\frac{3}{2}$ అయిన $c=0$

కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-4x-3y=0$

(2), (1) కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$(0,0)(-4,0),(0,-3)$ బిందువు ల గుండా పోతుంది. ఇదే విధంగా ఈ వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2+4x+3y=0$ అని చూపవచ్చును

3. $(2,0),(0,1),(4,5),(0,c)$ **బిందువులు చక్రీయాలు అయితే C విలువ ఎంత ?**

A. $x^2+y^2+gx+2fy+c_1=0$

$(2,0),(0,1),(4,5)$ బిందువులను తృప్తిపరుస్తుంది కనుక

$4+0+4g+c_1=0$ ... (i)

$0+1+2g.0+2f+c_1=0$ ... (ii)

$16+25+8g+10f+c_1=0$ ... (iii)

(ii) - (i) చేయగా

$-3-4g+2f=0$

$4g-2f=-3$ .... (iv)

(ii) - (iii) చేయగా

$-40-8g-8f=0$ (or) $g+f=-5$ .... (v)

(iv), v లు సాధించగా

$g=-\frac{13}{6}, f=-\frac{17}{6}$

(i) లో g,f ల విలువలు ప్రతిక్షేపించగా

$4+4\left(-\frac{13}{6}\right)+c_1=0$

www.sakshieducation.com

$c_1 = \frac{14}{3}$

వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 - \frac{13}{3}x - \frac{17}{3}y + \frac{14}{3} = 0$.

ఈ వృత్తం $(0, c)$ గుండా పోతుంది

$c^2 - \frac{17}{3} + \frac{14}{3} = 0$

$3c^2 - 17c + 14 = 0$

$\Rightarrow (3c - 14)(c - 1) = 0$

(లేదా)

$c = 1$ లేదా $\frac{14}{3}$

4. క్రింద ఇచ్చిన రేఖలతో ఏర్పడే త్రిభుజాల పరివృత్త సమీకరణాలను కనుక్కోండి.

i. $2x + y = 4$; $x + y = 6$; $x + 2y = 5$

A. ఇచ్చిన సమీకరణాలను క్రింద విధంగా తీసుకోండి $AB: 2x + y = 4$ $AB: 2x + y = 4$

$BC: x + y = 6$ $AC: x + 2y = 5$ లను సాధించగాలను సాధించగా

$B: (-2, 8)$ $A: (1, 2)$

$AC: x + 2y = 5$

$BC: x + y = 6$

లను సాధించగా

$C: (7, -1)$

వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

A, B, C ల గుండా పోతూ

$\therefore 4 + 64 - 4g + 16f + c = 0$ .... (i)

$1 + 4 + 2g + 4f + c = 0$ .... (ii)

$49 + 1 + 14g - 2f + c = 0$ ...(iii)

www.sakshieducation.com

(i) - (ii) చేయగా (iii) - (ii) చేయగా

$21-2g+4f=0$ .... (iv)

$15+4g-2f=0$ .... (v)

(iv), (v) లు సాధించగా $f=-\dfrac{19}{2}$

$g=-\dfrac{17}{2}$; $c=50$

g, f ల విలువలు (i) లో ప్రతిక్షేపించగా

$\therefore$ కావలసిన వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-17x-19y+50=0$

5. P బిందువు నుంచి $x^2+y^2-4x-6y-12=0$, $x^2+y^2+6x+18y+26=0$ వృత్తాలకు గీసిన ‹ æÅö Y ‡Ú ÈÌ **2 : 3** నిష్పత్తిలో ఉంటే **P** బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. $P(x,y)$ బిందుపథం మీది ఏదైనా ఒక బిందువు

$S \equiv x^2+y^2-4x-6y-12$

$PT_1=\sqrt{x^2+y^2-4x-6y-12}$

$S^1=x^2+y^2+6x+18y+26$

$PT_2=\sqrt{x^2+y^2+6x+18y+26}$

$\dfrac{PT_1}{PT_2}=\dfrac{2}{3}$ అని ఇవ్వబడినది

$\Rightarrow \dfrac{PT_1^2}{PT_2^2}=\dfrac{4}{9}$

$9\,PT_1^2=4.PT_2^2$

$9\left(x^2+y^2-4x-6y-12\right)$

$=4\left(x^2+y^2+6x+18y+26\right)$

$9x^2+9y^2-36x-54y-108$

www.sakshieducation.com

$= 4x^2 + 4y^2 + 24x + 72y + 104$

P బిందుపథం

$5x^2 + 5y^2 - 60x - 126y - 212 = 0$

6. $x^2 + y^2 - x + 3y - 22 = 0$ **వృత్తం** $y = x - 3$ **రేఖపై ఏర్పరిచే జ్యా పొడవును కనుక్కోండి.**

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 - x + 3y - 22 = 0$

కేంద్రం $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

$r = \sqrt{g^2 + f^2 - e} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{4} + 22}$

$\sqrt{\frac{1+9+88}{4}} = \sqrt{\frac{98}{4}}$

రేఖ సమీకరణము $y = x - 3 \Rightarrow x - y - 3 = 0$

P = కేంద్రం నుండి లంబ దూరము

$\frac{\left|\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 3\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

జ్యా పొడవు $= 2\sqrt{r^2 - p^2}$

$= 2\sqrt{\frac{98}{4} - \frac{1}{2}}$

$= 2\frac{\sqrt{98-2}}{2}$

$= \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$

www.sakshieducation.com

7. $(-2,3)$ కేంద్రంగా ఉంటూ $3x+4y+4=0$ రేఖపై చేసే జ్యా పొడవు 2 యూనిట్లు అయ్యే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. కేంద్రం $C(-2,3)$ నుండి రేఖ మీదకు దూరం

$$d=\left|\frac{3(-2)+4(3)+4}{\sqrt{9+16}}\right|=\frac{10}{5}=2$$

జ్యా AB పొడవు = 2 యూనిట్లు

వృత్త వ్యాసార్థం (r) అనుకొనిన

$\Rightarrow 2=2\sqrt{r^2-d^2}$

$\Rightarrow r^2-d^2=1$

$\Rightarrow r^2-4=1 \Rightarrow r^2=5$

వృత్త సమీకరణము

$(x+2)^2+(y-3)^2=5$

$\Rightarrow x^2+y^2+4x-6y+4+9-5=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+4x-6y+8=0$

8. $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ వృత్తానికి $x+y-8=0$ రేఖకు సమాంతరంగా ఉండే స్పర్శరేఖ సమీకరణం(లు) కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-4x+6y-12=0$ కేంద్రం $C(2,-3)$

వ్యాసార్థం $(r)=\sqrt{4+9+12}=\sqrt{25}=5$

$x+y-8=0$ రేఖకు సమాంతరంగా ఉండే రేఖా

సమీకరణం $x+y+k=0$ అనుకుందాం

ఈ రేఖ $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తే, $r=d$

$\Rightarrow 5$ కేంద్రం $C(2,-3)$నుండి $x+y+k=0$ రేఖ మీదకు లంబ దూరము

$$\Rightarrow 5=\frac{|2-3+k|}{\sqrt{1+1}}$$

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow 5\sqrt{2} = |k-1|$

$\therefore\ k = 1 = \pm 5\sqrt{2} \Rightarrow k = 1 \pm 5\sqrt{2}$

$\therefore$ కావలసిన స్పర్శరేఖా సమీకరణాలు

$x + y + \left(1 \pm 5\sqrt{2}\right) = 0$

9. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 3 = 0$ **వృత్తానికి** $3x - y + 4 = 0$ **రేఖకు లంబంగా ఉండే స్పర్శ రేఖా సమీకరణాలను కనుక్కోండి.**

A. $3x - y + 4 = 0$

కు లంబంగా ఉండే రేఖా సమీకరణం

$x + 3y + k = 0$

ఇది వృత్తానికి స్పర్శరేఖ అయిన

$r = d$

(అంటే) వ్యాసార్ధం = కేంద్రం $(-1,1)$ నుండి

$x + 3y + k = 0$ కు లంబ దూరము

$\Rightarrow \sqrt{1+1+3} = \left|\frac{-1+3(1)+k}{\sqrt{10}}\right|$

$\Rightarrow \sqrt{50} = |k+2|$

$\Rightarrow k + 2 = 5\sqrt{2}$

$k = -2 + 5\sqrt{2}$

$\therefore$ స్పర్శరేఖా సమీకరణాలు

$x + 3y - 2 \pm 5\sqrt{2} = 0$

www.sakshieducation.com

10. $(-1,0)$ గుండా పోతూ $x+y-7=0$ రేఖను $(3,4)$ వద్ద స్పృశించే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము

$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ... (1)

అనుకుందాం

ఇదా $(-1,0)$ గుండా పోతుందా కనుక

$1+0-2(g)(-1)+2f(0)+c=0$

$\Rightarrow -2g+c=-1$ ... (1)

S = 0 వృత్తం $x+y-7=0$ రేఖను $(3,4)$ వద్ద స్పృశిస్తుంది. కనుక $(3,4)$ వృత్తం పై ఉంటుంది

$\Rightarrow 9+16+2g(3)+2f(4)+c=0$

$\Rightarrow 6g+8f+c=25$ ....(2)

(1) నుండి $c=-1+2g$

(2) నుండి $6g+8f+(-1+2g)=-25$

$\Rightarrow 8g+8f=-24$

$\Rightarrow g+f=-3$

$\Rightarrow f=-3-g$

$x+y-7=0$ రేఖ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తుంది కనుక

$r=d$

$$\Rightarrow \sqrt{g^2+f^2-c}=\left|\frac{(-g)+(-f)-7}{\sqrt{1+1}}\right|$$

$$\Rightarrow 2\left(g^2+f^2-c\right)=g+f+7^2$$

$$\Rightarrow 2\left[g^2+(-3-g)^2-(-1\ 2g)\right]$$

$$=[g-3-g+7]^2$$

$$\Rightarrow 2\left[g^2+g^2+9+6g+1-2g\right]=16$$

www.sakshieducation.com

$$\Rightarrow 2g^2 + 4g + 10 = 8$$

$$\Rightarrow g^2 + 2g + 1 = 0$$

$$(g+1)^2 = 0 \Rightarrow g = -1$$

$$\therefore\ f = 3 - g = -3(-1) = -2$$

$$c = -1 + 2g$$

$$\Rightarrow c = (-1) + 2(-1) = -3$$

$\therefore$ వృత్త సమీకరణము

$$x^2 + y^2 + 2(-1)x + 2(-2)y + (-3) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$$

11. $x + y + 1 = 0$ రేఖ $x^2 + y^2 - 3x + 7y + 14 = 0$ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తుందని చూపి, స్పర్శ బిందువును కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 - 3x + 7y + 14 = 0$

వృత్త కేంద్రం $C = \left(\frac{3}{2} m \frac{-7}{2}\right)$

వృత్త వ్యాసార్థము $(r) = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{49}{4} - 14}$

$$= \frac{\sqrt{58-56}}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

కేంద్రం C నుండి రేఖ $x + y + 1 = 0$ కు

లంబదూరం

$$d = \frac{\left|\frac{3}{7} - \frac{6}{2} + 1\right|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore\ r = d = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

రేఖ వృత్తాన్ని స్పృశిస్తుంది

www.sakshieducation.com

రేఖ వృత్తాన్ని $P(h,k)$ వద్ద స్పృశిస్తుంది అనుకొనుము

C యొక్క లంబ పాదం P అవుతుంది

$$\frac{h-\frac{3}{2}}{1}=\frac{k+\frac{7}{2}}{1}=\frac{\left(\frac{3}{2}-\frac{7}{2}+1\right)}{1^2+1^2}$$

$$\Rightarrow h-\frac{3}{2}=k+\frac{7}{2}=+\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow h=2,\ k=-3$$

$\therefore$ స్పర్శ బిందువు = $(2,-3)$

14. $x^2+y^2+22x-4y-100=0$; $x^2+y^2-22x+4y+100=0$ వృత్తాల ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు కనుక్కోండి.

A. $C_1=(-11,2)$ $\quad C_2=(11,-2)$

$$r_1=\sqrt{121+4+100}=15$$

$$r_2=\sqrt{121+41-100}=5$$

$y=mx+c$ స్పర్శరేఖ అనుకొనుము

$$mx-y+c=0$$

$$\left|\frac{m(-11)-2+c}{\sqrt{1+m^2}}\right|=15 \quad .... (1)$$

$$5=\left|\frac{m(11)+2+c}{\sqrt{1+m^2}}\right| \quad .... (2)$$

(1) + (2) చేయగా

$$=\frac{3}{1}=\frac{-11m-2+c}{m(11)+2+c}$$

$$=\frac{3+1}{3-1}=\frac{2c}{-22m-4}$$

$C=-22m-4$ $\quad \therefore y=mx-22m-4$

www.sakshieducation.com

ఈ రేఖ రెండవ వృత్తానికి స్పర్శరేఖ

$$\therefore \left|\frac{11m+2-22m-4}{\sqrt{m^2+1}}\right| = 5$$

వర్గీకరించి అడ్డ గుణకారము చేయగా

$$25\left(1+m^2\right) = \left(11m+2-22m-4\right)^2$$

$$96m^2+44m-21=0$$

$$\Rightarrow 96m^2+72m-28m-21=0$$

$$m = \frac{7}{24}, \frac{-3}{4}$$

$$C = \frac{25}{2}$$

స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{25}{2}$$

$$4y+3x = 50 \Rightarrow 3x+4y-50=0$$

$$C = -22m-4$$

$$= -22\left(\frac{7}{24}\right)-4$$

$$= \frac{-77-48}{12} = \frac{-125}{12}$$

$$y = \frac{7}{24}x - \frac{125}{2}$$

స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$\Rightarrow 24y = 7x-250$$

$$\Rightarrow 7x-24y-250=0$$

www.sakshieducation.com

15. $x^2+y^2-4x-10y+28=0$; $x^2+y^2+4x-6y+4=0$ వృత్తాల తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు కనుక్కోండి.

A. $C_1=(2,5),\ C_2=(-2,3)$

$e_1\sqrt{4+25-28}=1,\ r_2=\sqrt{4+9-4}=3$

$r_1+r_2=4$

$C_1C_2=\sqrt{(2+2)^2+(5-3)^2}$

$=\sqrt{16+4}=\sqrt{20}$

'C' బిందువు $C_1\ C_2$ $5:3$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది

$$C=\left[\frac{1.(-2)+3.2}{1+3},\frac{1.3+3.5}{1+3}\right]$$

$$=\left[\frac{4}{4},\frac{9}{2}\right]=\left[1,\frac{9}{2}\right]$$

తిర్యక్ ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల సమీకరణము

$S_1^2=SS_{11}$

$$\left(x.1+\frac{9}{2}y-2(x+1)-5\left(y+\frac{9}{2}\right)+28\right)^2$$

$$=\left[1+\frac{81}{4}-4-10\times\frac{9}{2}+28\right]$$

$$\left(x^2+y^2-4x-10y+28\right)$$

$$\left(-x-\frac{1}{2}y+\frac{7}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(x^2+y^2-4x-10y+28\right)$$

$$(-2x-y+7)^2=\left(x^2+y^2-4x-10y+28\right)$$

$4x^2+y^2+4xy-28x-14y+49$

$=x^2+y^2-4x-10y+28$

$3x^2+4xy-24x-4y+21=0$

www.sakshieducation.com

$(3x+4y-21)\,;\,(x-1)=0$

$3x+4y-21\,;\,x-1=0$

16. $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ **వృత్తాన్ని** $(-1,1)$ **వద్ద అంతరంగా స్పృశిస్తూ, 2 యూనిట్ల వ్యాసార్ధం ఉన్న వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.**

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2-4x+6y-12=0$

కేంద్రం $C_1=(+2,-3)$

వ్యాసార్ధం $(r_1)=\sqrt{4+9+12}=\sqrt{25}=5$

కావలసిన వృత్త వ్యాసారం $(r_2)=2$

కావలసిన వృత్త కేంద్రం $C_2(\alpha,\beta)$ అనుకుందాం

స్పర్శబిందువు $P(-1,1)$, $\overline{C_1C_2}$ రేఖాఖండితాన్ని బాహ్యంగా $r_1:r_2=5:2$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది. కనుక

$$P(-1,1)=\left(\frac{5\alpha-2(2)}{5-2},\frac{5\beta-2(-3)}{5-2}\right)$$

$$\frac{5\alpha-4}{3}=-1\Rightarrow 5\alpha=-3+4=1$$

$$\Rightarrow \alpha=\frac{1}{5}$$

$$\frac{5\beta+6}{3}=1\Rightarrow 5\beta=3-6\Rightarrow \beta=\frac{-3}{5}$$

$$\therefore C_2=\left(\frac{1}{5},\frac{-3}{5}\right)$$

$\therefore$ కావలసిన వృత్త సమీకరణం

$$\left(x-\frac{1}{5}\right)^2+\left(y+\frac{-3}{5}\right)=2^2$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{2x}{5}+\frac{1}{25}+y^2+\frac{6}{5}y+\frac{9}{25}=4$$

www.sakshieducation.com

$$\Rightarrow 25\left(x^2+y^2-10x\right)+1+30+9=100$$

$$\Rightarrow 25\left(x^2+y^2\right)-10x+30y-90=0$$

$$\Rightarrow 5\left(x^2+y^2\right)-2x+6y-18=0$$

17. $(1,3)$ నుంచి $x^2+y^2-2x+4y-11=0$ వృత్తానికి గల స్పర్శరేఖా యుగ్మ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి. వాటి మధ్య కోణం ఎంత ?

A. $S.S_{11}=S_1^2$

$$\left(x^2+y^2-2x+4y-11\right)(1+9-2+12-11)$$

$$=\left[x+3y-1(x+1)+2(y+3)-11\right]^2$$

$$\left(x^2+y^2-2x+4y-11\right)9=[5y-6]^2$$

$$9x^2+9y^2-18x+36y-99$$

$$=25y^2+36-60y$$

$$9x^2-16y^2-18x+96y-135=0$$

$$\cos\theta=\frac{|a+b|}{\sqrt{(a-b)^2+4h^2}}=\frac{|9-16|}{\sqrt{(25)^2}}$$

$$\frac{|-7|}{25}=\frac{7}{25}$$

$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{7}{25}\right)$$

www.sakshieducation.com

18. $2x-3y+1=0$ సరళరేఖని $(1,1)$ వద్ద స్పృశించే $\sqrt{13}$ యూనిట్ల వ్యాసార్థంతో గల వృత్తాల సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త కేంద్రాలు $(1,1)$ గుండా పోతూ $2x-3y+1=0$ రేఖకు లంబంగా ఉండే రేఖ మీద ఉంటాయి

కేంద్రాలు కలిగిన రేఖ

$3x+2y+k=0$

ఈ రేఖ $(1,1)$ గుండా పోతుంది

$3+2+k=0 \Rightarrow k=-5$

AB సమీకరణాలు $3x+2y-5=0$

ఈ కేంద్రాలు $(1,1)$ నుంచి $\sqrt{13}$ యూనిట్ల దూరంలో ఉంటూ $3x+2y-5=0$ రేఖ పై ఉంటాయి. కాబట్టి ఈ కేంద్రాలు

$\left(1+\sqrt{13}\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}\right),1+\sqrt{13},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$ మరియు $\left(1-\sqrt{13}\frac{(-2)}{\sqrt{13}},1-\sqrt{13},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

(i.e.,) $(1-2,\ 1+3)$ మరియు $(1+2,\ 1-3)$

$(-1,4)$ మరియు $(3,-2)$

సందర్భం (i) :

కేంద్రం $(-1,4)$, $r=\sqrt{13}$

వృత్త సమీకరణము

$(x+1)^2+(y-4)^2=13$

$x^2+2x+1+^2-8y+16-13=0$

$x^2+y^2+2x-8y+4=0$

సందర్భం (ii) :

కేంద్రం $(3,-2)$, $r=\sqrt{13}$

వృత్త సమీకరణము

$(x-3)^2+(y+2)^2=13$

$x^2-6x+9+y^2+4y+4-13=0$

www.sakshieducation.com

$x^2 + y^2 - 6x + 4y = 0$

19. $x_1 y_1 \neq 0$ అయి, $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తం పై ఉన్న బిందువు $P(x_1, y_1)$ వద్ద గీసిన స్పర్శరేఖ నిరూపకాక్షాలతో ఏర్పరిచే త్రిభుజ వైశాల్యాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 = a^2$

$P(x_1, y_1)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$xx_1 + yy_1 = a^2$ .... (1)

ఈ స్పర్శరేఖ X - అక్షాన్ని A వద్ద, Y - అక్షాన్ని B వద్ద ఖండిస్తుంది

అంతరఖండ రూపంలోనికి మార్చగా

$$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{a^2} = 1$$

$$\frac{x}{\left(\frac{a^2}{x_1}\right)} + \frac{y}{\left(\frac{a^2}{y_1}\right)} = 1$$

$$OA = \frac{a^2}{x_1}, OB = \frac{a^2}{y_1}$$

$$OAB = \frac{1}{2}|OA.DB| = \frac{1}{2}\left|\frac{a^2}{x_1}.\frac{a^2}{y_1}\right|$$

$$= \frac{a^4}{2|x_1 y_1|}$$

www.sakshieducation.com

20. $x^2+y^2=a^2$ వృత్తానికి P గుండా గీసిన స్పర్శరేఖలు X - అక్షం గుండా θ_1, θ_2 కోణాలు చేస్తున్నాయి. $\cot\theta_1+\cot\theta_2=k$ అయ్యే బిందు పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

A. వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2=a^2$

స్పర్శరేఖ m అయితే $P(x_1, y_1)$ గుండా పోయే స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$y_1 = mx_1 \pm a\sqrt{1+m^2}$$

$$(y_1-mx_1)^2 = a^2(1+m^2)$$

$$m^2x_1^2+y_1^2-2m_1y_1-a^2-a^2m^2=0$$

$$m^2(x_1^2-a^2)-2mx_1y_1+(y_1^2-a^2)=0$$

m_1, m_2 ల మూలాలు అనుకొందాం

$$m_1+m_2=\tan\theta_1+\tan\theta_2=\frac{2x_1y_1}{x_1^2-a^2}$$

$$m_1m_2=\tan\theta_1\tan\theta_2=\frac{y_1^2-a^2}{x_1^2-a^2}$$

దత్తాంశం ప్రకారం $\cot\theta_1+\cot\theta_2=k$

$$\frac{1}{\tan\theta_1}+\frac{1}{\tan\theta_2}=k$$

$$\frac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{\tan\theta_1.\tan\theta_2}=k$$

$$\frac{2x_1y_1}{y_1^2-a^2}=k$$

$$2x_1y_1=k(y_1^2-a^2)$$

$P(x_1, y_1)$ బిందు పథము $2xy=k(y^2-a^2)$

విపర్యంగా $P(x_1,y_1)2xy=k(y^2-a^2)$

నియమాన్ని తృప్తిపరుస్తుంది

$\cot\theta_1+\cot\theta_2=k$ అని చూపవచ్చును

www.sakshieducation.com

P బిందు పథము $2xy = k\left(y^2 - a^2\right)$

21. $lx + my + n = 0$ రేఖపై ఉన్న బిందువుల నుంచి $x^2 + y^2 = a^2$ వృత్తానికి గీసిన స్పర్శజ్యాల మధ్య బిందువుల బిందు పథాన్ని కనుక్కోండి.

A. $P(x_1, y_1)$ బిందు పథము P మీది బిందువు

$x^2 + y^2 = a^2$

జ్యా సమీకరణము $lx + my + n = 0$ .... (1)

వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 = a^2$

(x_1, y_1) మధ్య బిందువుగా గల జ్యా సమీకరణము

$S_1 = S_{11}$

$xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$

$xx_1 + yy_1 - \left(x_1^2 + y_1^2\right) = 0$ .... (2)

వృత్తం దృష్ట్యా (2) యొక్క ధృవము

$$\left(\frac{-a^2 l}{n}, -\frac{a^2 m}{n}\right) = \left(\frac{-a^2 x_1}{-\left(x_1^2 + y_1^2\right)}, \frac{-a^2 y_1}{-\left(x_1^2 + y_1^2\right)}\right)$$

$$= \left(\frac{a^2 x_1}{x_1^2 + y_1^2}, \frac{a^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2}\right)$$

$lx + my + n = 0$ రేఖ మీద P ఉంది

$$l\frac{\left(a^2 x_1\right)}{x_1^2 + y_1^2} + \frac{m\left(a^2 y_1\right)}{x_1^2 + y_1^2} + n = 0$$

$la^2 x_1 + ma^2 y_1 + n\left(x_1^2 + y_1^2\right) = 0$

$P(x_1, y_1)$ బిందు పథము $n\left(x^2 + y^2\right) + a^2(lx + my) = 0$

www.sakshieducation.com

22. $x^2+y^2-14x+6y+33=0$, $x^2+y^2+30x-2y+1=0$ లకు నాలుగు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు ఉంటాయని చూపి వాటికి సరూప అంతర కేంద్రం సరేప బాహ్య కేంద్రంలను కనుక్కోండి.

A. వృత్తాల సమీకరణాలు

$x^2+y^2-14x+6y+33=0$ మరియు

$x^2+y^2+30x-2y+1=0$

కేంద్రాలు $A(7,-3)$, $B(-15,1)$

$r_1=\sqrt{49+9-33}=5$

$r_2=\sqrt{225+1-1}=15$

$AB=\sqrt{(7+15)^2+(-3-1)^2}$

$=\sqrt{484+16}=\sqrt{500}>r_1+r_2$

$\therefore$ దత్త వృత్తానికి 4 ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలను గీయగలము

$r_1:r_2=5:15=1:3$

S^1, AB ని 1 : 3 నిష్పత్తిలో అంతరంగా విభజిస్తుంది

S^1 నిరూపకాలు

$$\left(\frac{1.(-15)+3.7}{1+3},\frac{1.1+3(-3)}{1+3}\right)$$

$$=\left(\frac{6}{4},\frac{1-9}{4}\right)=\left(\frac{3}{2},-2\right)$$

బాహ్య స్వరూప కేంద్రం S, AB ని బాహ్యంగా 1 : 3 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది

S నిరూపకాలు

$$\left(\frac{1(-15)-3(7)}{1-3},\frac{1.1-3(-3)}{1-3}\right)$$

$$=\left(\frac{-15-21}{-2},\frac{1+9}{-2}\right)=(18,-5)$$

www.sakshieducation.com

23. $x^2+y^2-8x-6y-21=0$, $x^2+y^2-2y-15=0$ వృత్తాలకు రెండే రెండు ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలుంటాయని చూపండి. ఇంకా వీటి ఖండన బిందువులను కనుక్కోండి.

A. C_1, C_2 కేంద్రాలు మరియు r_1, r_2 లు వ్యాసార్ధాలు

వృత్తాల సమీకరణాలు

$x^2+y^2-8x-6y-21=0$ మరియు

$x^2+y^2-2y-15=0$

$C_1(4,3), C_2(0,1)$

$r_1=\sqrt{16+9-21}=2, r_2=\sqrt{1+15}=4$

$\overline{C_1C_2^2}=(4-0)^2+(3-1)^2=16+4=20$

$C_1C_2=2\sqrt{5}$

$|r_1-r_2|=|2-4|=2, r_1+r_2=2+4=6$

$|r_1-r_2|<C_1C_2<r_1+r_2$

దత్త వృత్తాలు ఖండించుకుంటాయి. 2 ఉమ్మడి స్పర్శరేఖలు ఉంటాయి

$r_1:r_2=2:4=1:2$

ఈ స్పర్శరేఖలు బాహ్య సరూప కేంద్రం వద్ద ఖండించుకుంటాయి

S నిరూపకాలు

$$\left(\frac{1.0-2.4}{1-2},\frac{1.0-2.3}{-2}\right)=\left(\frac{-8}{-1},\frac{-5}{-1}\right)=(8,5)$$

www.sakshieducation.com

24. $x^2+y^2-4x-6y-12=0$, $x^2+y^2+6x+18y+26=0$ వృత్తాలు స్పృశించుకుంటాయని చూపండి. ఇంకా స్పర్శబిందువును, స్పర్శబిందువు వద్ద ఉమ్మడి స్పర్శరేఖను కనుక్కోండి.

A. వృత్తాల సమీకరణాలు

$x^2+y^2-4x-6y-12=0$ మరియు

$x^2+y^2+6x+18y+26=0$

కేంద్రాలు $C_1(2,3)$, $C_2=(-3,-9)$

$r_1=\sqrt{4+9+12}=5$

$r_2=\sqrt{9+81-26}=8$

$C_1C_2=\sqrt{(2+3)^2+(3+9)^2}$

$=\sqrt{25+144}=13=r_1+r_2$

$\therefore$ వృత్తాలు బాహ్యంగా స్పృశించుకుంటాయి

ప్రత్యక్ష ఉమ్మడి స్పర్శరేఖల సమీకరణము

$S_1-S_2=0$

$-10x-24y-38=0$

$5x+12y+19=0$

స్పర్శబిందువు P, C_1C_2 ని 5 : 8 నిష్పత్తిలో

విభజిస్తుంది. నిరూపకాలు

P నిరూపకాలు

$$\left(\frac{5(-3)+8.2}{5+8},\frac{5(-9)+8.3}{5+8}\right)=\left(\frac{1}{13},\frac{-21}{13}\right)$$

www.sakshieducation.com

బిందుపథం

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $A(-3,2)$, $B(0,4)$ బిందువుల నుంచి సమాన దూరంలో ఉండే బిందు పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి

సాధన. $A(-3,2)$, $B(0,4)$ లు దత్త బిందువులు

$P(x,y)$ బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము $PA = PB$

$$PA^2 = PB^2$$

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = (x-0)^2 + (y-4)^2$$

$$x^2 + 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = x^2 + y^2 - 8y + 16$$

$6x + 4y = 3$ బిందుపథ సమీకరణము

2. మూల బిందువు నుంచి P దూరం, $A(1,2)$ బిందువు నుంచి P దూరానికి రెట్టింపు అయితే బిందువు P పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. $0(0,0)$, $A(1,2)$ లు దత్త బిందువులు

$P(x,y)$ బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు.

దత్త నియమము $OP = 2AP$

$$OP^2 = 4AP^2$$

$$x^2 + y^2 = 4[(x-1)^2 + (y+2)^2]$$

$$= 4(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4)$$

$$x^2 + y^2 = 4x^2 + 4y^2 - 8x - 16y + 20$$

యొక్క బిందుపథ సమీకరణము

$$3x^2 + 3y^2 - 8x - 16y + 20 = 0$$

3. మూల బిందువు నుంచి P బిందువు దూరానికి వర్గం P – బిందువు Y – నిరూపకానికి నాలుగురెట్లుంటే బిందువు P – పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి

సాధన. $P(x,y)$ బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము $OP^2 = 4y \Rightarrow x^2 + y^2 = 4y$

P బిందుపథ సమీకరణము $x^2 + y^2 - 4y = 0$

www.sakshieducation.com

4. $A=(a,0)$, $B=(-a,0)$, $0<|a|<|c|$. $PA^2+PB^2=2C^2$ **అయ్యేటట్లు బిందువు** P **పథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి**

సాధన. $P(x,y)$ బిందుపథము మీది ఏదేని బిందువు

$A=(a,0)$

$B=(-a,0)$

దత్త నియమము

$PA^2+PB^2=2C^2$

$(x-a)^2+(y-0)^2+(x+a)^2+(y-0)^2=2c^2$

$x^2-2ax+a^2+y^2+x^2+2ax+a^2+y^2=2c^2$

$2x^2+2y^2=2c^2-2a^2$

$\therefore x^2+y^2=c^2-a^2$ బిందుపథ సమీకరణము

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. **బిందువు** $A(3,0)$ **నుంచి** P **బిందువు దూరం,** $B(-3,0)$ **బిందువు నుంచి** P **బిందువు దూరానికి రెట్టింపు అయితే** P **బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. బిందుపథం మీద $P(x,y)$ ఒక బిందువనుకొందాం. అప్పుడు P తృప్తిపరిచే జ్యామితీయ నియమం

$PA=2PB$

అంటే $PA^2=4PB^2$

అంటే $(x-3)^2+y^2=4[(x+3)^2+y^2]$

అంటే $x^2-6x+9+y^2=4[x^2+6x+9+y^2]$

అంటే $3x^2+3y^2+30x+27=0$

అంటే $x^2+y^2+10x+9=0\rightarrow(2)$

సమీకరణం (2) ను $Q(x_1,y_1)$ బిందువు తృప్తిపరుస్తుందనుకొందాం.

అప్పుడు

ఇప్పుడు

ను ఉపయోగిస్తే)

అందువల్ల అంటే బిందువు ని తృప్తిపరుస్తుంది

అందువల్ల కావలసిన బిందుపథ సమీకరణం

www.sakshieducation.com

2. **(4 , 0) , (0 , 4) కర్ణాగ్రాలుగా గల లంబకోణ త్రిభుజం మూడో శీర్షం బిందుపథం కనుక్కోండి**

సాధన. $A=(4,0)$, $B=(0,4)$ అనుకుందాం

PA, PB లు లంబంగా ఉండేటట్లు $P(x,y)$ ని తీసుకొందాం

అప్పుడు $PA^2+PB^2=AB^2 \rightarrow (1)$

P, A, B లు సరేఖీయాలు కావు.

అంటే $(x-4)^2+y^2+x^2+(y-4)^2=16+16$,

$P \neq A, P \neq B$

లేదా $x^2+y^2-4x-4y=0$,

$(x,y)\neq(4,0),(x,y)\neq(0,4) \rightarrow (2)$

$Q(x_1,y_1)$ బిందువు (2) ను తృప్తిపరుస్తుందని, Q బిందువు A, B లకు భిన్నమైందని అనుకొందాం

అప్పుడు $x_1^2+y_1^2-4x_1-4y_1=0$,

$(x_1,y_1)\neq(4,0),\ (x_1,\ y_1)\neq(0,4) \rightarrow (3)$

ఇప్పుడు QA^2+QB^2

$=(x_1-4)^2+y_1^2+x_1^2+(y_1-4)^2$

$=x_1^2-8x_1+16+y_1^2+x_1^2+y_1^2-8y_1+16$

$=2(x_1^2+y_1^2-4x_1-4y_1)+32$

= 32 (3) ను ఉపయోగిస్తే)

$=AB^2$

అందువల్ల $=QA^2+QB^2=AB^2$, $Q\neq A,\ Q\neq B$

అంటే $Q(x_1,y_1)$ బిందువు (1)ని తృప్తిపరుస్తుంది. అందువల్ల (2) కావలసిన బిందుపథ సమీకరణం, ఇది A, B లు మినహా, $\overline{AB}$ ని వ్యాసంగా గల వృత్తాన్ని సూచిస్తుంది.

3. $A(2,3)$, $B(-3,4)$ **లు దత్త బిందువులు. త్రిభుజం** PAB **వైశాల్యం, 8.5 ఉండేటట్లుగా** P **బిందుపథ సమీకరణం కనుక్కోండి.**

సాధన. బిందుపథం మీది ఒక బిందువును $P(x,y)$ అనుకుందాం. Pని తృప్తిపరచే జ్యామితీయ నియమం

ΔPAB వైశాల్యం $=8.5 \rightarrow (1)$

అంటే $\frac{1}{2}\left|x(3-4)+2(4-y)-3(y-3)\right|=8.5$

అంటే $\left|-x+8-2y-3y+9\right|=17$

అంటే $\left|-x-5y+17\right|=17$

www.sakshieducation.com

అంటే $-x-5y+17=17$ లేదా

$-x-5y+17=-17$

అంటే $x+5y=0$ లేదా $x+5y=34$

అందువల్ల $(x+5y)(x+5y-34)=0$

అంటే

$x^2+10xy+25y^2-34x-170y=0 \to (2)$

$Q(x_1, y_1)$ బిందువు (2) ని తృప్తిపరుసుందనుకొందాం

అప్పుడు $x_1+5y_1=0$ లేదా

$x_1+5y_1=34 \to (3)$

ఇప్పుడు ΔQAB వైశాల్యం

$=\frac{1}{2}\left|(x_1(3-4)+2(4-y_1)-3(y_1-3)\right|$

$=\frac{1}{2}\left|-x_1+8-2y_1-3y_1+9\right|$

$=\frac{1}{2}\left|-x_1-5y_1+17\right|$

$=\frac{17}{2}=8.5$ (3) ను ఉపయోగిస్తే)

అంటే $Q(x_1, y_1)$ బిందువు (1) ని తృప్తిపరుస్తుంది

అందువల్ల కావలసిన బిందుపథ సమీకరణం

$(x+5y)(x+5y-34)=0$ లేదా

$x^2+10xy+25y^2-34x-170y=0$

4. (2, 3), (-1, 5) బిందువులను కలిపే రేఖాఖండం, P వద్ద లంబకోణం చేస్తే, P బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. $A(2,3), B(-1,5)$ లు దత్త బిందువులు

$P(x, y)$ బిందుపథం మీద ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము $\angle APB = 90^0$

$AP^2+PB^2=AB^2$

$(x-2)^2+(y-3)^2+(x+1)^2+(y-5)^2$

$=(2+1)^2+(3-5)^2$

$x^2-4x+4+y^2-6y+9+x^2+2x+1+y^2$

$-10y+25=9+4$

$2x^2+2y^2-2x-16y+26=0$

P యొక్క బిందుపథం $x^2+y^2-x-8y+13=0$

www.sakshieducation.com

$(x, y) \neq (2,3)$ మరియు $(x, y) \neq (-1,5)$

5. (-5, 0), (5, 0) బిందువుల నుంచి దూరాల భేదం 8 గా గల బిందుపథం సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. $A(5,0), B(-5,0)$ లు దత్త బిందువులు

$P(x, y)$ బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము $|PA - PB| = 8$

$PA - PB = 8$............(1)

$PA^2 - PB^2 = [(x-5)^2 + (y-0)^2]$

$-[(x+5)^2 + (y-0)^2]$

$= x^2 - 10x + 25 + y^2 - x^2 - 10x - 25 - y^2$

$= -20x$

$(PA + PB)(PA - PB) = -20x$

$(PA + PB)8 = -20x$

$PA + PB = -\frac{5}{2} \rightarrow (2)$

(1),(2) లను కూడగా

$2PA = \frac{5x}{2} + 8 = \frac{-5x + 16}{2}$

$4PA = -5x + 16$

$16PA^2 = (-5x + 16)^2$

$16[(x-5)^2 + y^2] = (-5x + 16)^2$

$16[x^2 - 10 + 25 + y^2] = [-5x + 16]^2$

$16x^2 + 16y^2 - 160x + 400$

$= 25x^2 + 256 - 160x$

$9x^2 - 16y^2 = 144$

144 తో భాగించగా, P బిందుపథం

$\frac{9x^2}{144} - \frac{16y^2}{144} = 1$

కనుక $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

www.sakshieducation.com

6. $A=(4,0),\ B=(-4,0)$, $|PA-PB|=4$ **అయితే** P **బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి**

సాధన. $A=(4,0),\ B=(-4,0)$ లు దత్త బిందువులు

$P(x,y)$ బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము $|PA-PB|=4 \rightarrow (1)$

$PA^2-PB^2=[(x-4)^2+(y-0)^2$

$-[(x+4)^2+y^2]$

$=x^2-8x+16x+y^2-x^2-8x-16-y^2$

$=-16x$

$(PA+PB)(PA-PB)=-16x$

$(PA+PB)4=-16x$

$PA+PB=-4x \rightarrow (2)$

(1),(2) లను కూడగా

$2PA=4-4x$

$PA=2-2x$

$PA^2=(2-2x)^2$

$(x-4)^2+(y-0)^2=(2-2x)^2$

$x^2-8x+16+y^2=4+4x^2-8x$

$3x^2-y^2=12$

12 తో భాగించగా, P బిందుపథం $\frac{3x^2}{12}-\frac{y^2}{12}=1$

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$

7. **(0, 2), (0, -2) బిందువుల నుంచి దూరాల మొత్తం 6 గా గల బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి**

సాధన. $A(0,2),\ B(0,-2)$ లు దత్త బిందువులు

$P(x,y)$ బిందుపథం మీది ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము $PA+PB=6 \rightarrow (1)$

$PA^2-PB^2=[(x-0)^2+(y-2)^2]$

$-[(x-0)^2+(y+2)^2]$

$=x^2+y^2-4y+4-x^2-y^2-4y-4=-8y$

$(PA+PB)(PA-PB)=-8y$

www.sakshieducation.com

$6(PA-PB)=-8y$

$PA-PB=-\frac{8y}{6}$

$PA-PB=-\frac{4y}{3}\rightarrow(2)$

(1),(2) లను కూడగా $2PA=6-\frac{4y}{3}$

$PA=3-\frac{2y}{3}$

$PA^2=\left(3-\frac{2y}{3}\right)^2$

$x^2+(y-2)^2=\left(3-\frac{2y}{3}\right)^2$

$x^2+y^2-4y+4=9+\frac{4y^2}{9}-4y$

$9x^2+9y^2+36=81+4y^2$

$9x^2+5y^2=45$

P యొక్క బిందుపథము $\frac{9x^2}{45}+\frac{5y^2}{45}=1$

$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{9}=1$

8. $A=(2,3),B(2,-3),\ PA+PB=8$ **అయితే** P **బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి**

సాధన. $A=(2,3),B(2,-3)$ లు దత్త బిందువులు

$P(x,y)$ బిందుపథము మీద ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము $PA+PB=8\rightarrow(1)$

$PA^2-PB^2=[(x-2)^2+(y-3)^2]$

$-[(x-2)^2+(y+3)^2]$

$=(x-2)^2+(y-3)^2-(x-2)^2-(y+3)^2$

$=(y-3)^2-(y+3)^2=-12y$

$(PA+PB)(PA-PB)=-12y$

$8(PA-PB)=-12y$

$PA-PB=\frac{-12y}{8}$

$PA-PB=\frac{-3y}{2}$

www.sakshieducation.com

(1),(2) లను కూడగా

$$2PA = 8 - \frac{3y}{2} = \frac{16-3y}{2}$$

$$4PA = 16 - 3y$$

$$16PA^2 = (16-3y)^2$$

$$16[(x-2)^2 + (y-3)^2] = (16-3y)^2$$

$$16(x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9) = (16-3y)^2$$

$$16x^2 + 16y^2 - 64x - 96y + 208$$

$$= 256 + 9y^2 - 96y$$

$$16x^2 + 7y^2 - 64x - 48 = 0$$

P బిందుపథం $16x^2 + 7y^2 - 64x - 48 = 0$

9. $A(5,3)$, $B(3,-2)$ **లు రెండు స్థిర బిందువులు. త్రిభుజం** PAB **వైశాల్యం 9గా ఉండేటట్లు** P **బిందుపథ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.**

సాధన. $A(5,3)$, $B(3,-2)$ లు దత్త బిందువులు

$P(x,y)$ బిందుపథం మీద ఏదేని బిందువు

దత్త నియమము $\Delta PAB = 9$

$$\frac{1}{2}\left|5(-2-y) + 3(y-3) + x(3+2)\right| = 9$$

$$\left|-10 - 5y + 3y - 9 + 5x\right| = 18$$

$$5x - 2y - 19 = \pm 18$$

$5x - 2y - 19 = 18$ లేదా $5x - 2y - 19 = -18$

$5x - 2y - 37 = 0$ లేదా $5x - 2y - 1 = 0$

P యొక్క బిందుపథము

$$(5x - 2y - 37)(5x - 2y - 1) = 0$$

10. $A(1,2)$, $B(2,-3)$ $C(-2,3)$ **లు మూడు బిందువులు.** $PA^2 + PB^2 = 2PC^2$ **అయ్యేటట్లు** P **చరిస్తుంది.** P **బిందుపథం సమీకరణం** $7x - 7y + 4 = 0$ **అని చూపండి.**

సాధన. $P(x,y)$ బిందుపథం మీద ఏదేని బిందువు

$A = (1,2)$, $B = (2,-3)$, $C = (-2,3)$ లు దత్త బిందువులు.

దత్త నియమము $PA^2 + PB^2 = 2PC^2$

$$\Rightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (x-2)^2 + (y+3)^2$$

$$= 2[(x+2)^2 + (y-3)^2]$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 6x + 2y + 18$$

www.sakshieducation.com

$= 2x^2 + 2y^2 + 8x - 12y + 26$

$\Rightarrow 14x - 14y + 8 = 0$

$\therefore 7x - 7y + 4 = 0$ బిందుపథ సమీకరణం

11.. (4, 0) , (0, 4). లు కర్ణాగ్రాలు గా గ లంబ కోణ త్రిభుజ మూడో శీర్షం బిందు పథ సమికరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. A(4, 0) , B(0, 4)

P(x, y) బిందు పథం పై ఏదేని బిందువు అనుకోండి.

PA , PB లు లంబంగా ఉన్నాయి

$PA^2 + PB^2 = AB^2$

$(x-4)^2 + y^2 + x^2 + (y-4)^2 = (4-0)^2 + (0-4)^2$

$x^2 - 8x+16+ y^2 + x^2 + y^2 - 8y + 16 = 16+16$

$2x^2 + 2y^2 - 8x - 8y = 0$

P(x, y) బిందు పథం $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$

12.(2, 3) , (2, –3) బిందు వు లనుంచి P. దూరం2 : 3 నిష్పత్తి లో ఉంటే బిందు పథ సమికరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన.

P(x, y) బిందు పథం పై ఏదేని బిందువు అనుకోండి.

A(2, 3), B(2, –3)

PA : PB = 2 : 3

$\Rightarrow 3PA = 2PB$

$\Rightarrow 9PA^2 = 4PB^2$

$\Rightarrow 9[(x-2)^2 + (y-3)^2] = 4[(x-2)^2 + (y+3)^2]$

$\Rightarrow 9[x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9]$

$= 4[x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9]$

$\therefore$ P(x, y) బిందు పథం $5x^2 + 5y^2 - 20x - 78y + 65 = 0$.

www.sakshieducation.com

13. (2, 3) , (–1, 5) బిందు వు లను కలిపే రేఖా ఖండం P వద్ద లంబకోణం చేస్తే బిందు పథ సమికరణాన్ని కనుక్కోండి

Sol. A(2, 3), B(–1, 5).

P(x,y),A(2,3), B(–1,5)

P(x, y) బిందు పథం పై ఏదేని బిందువు అనుకోండి

: $\angle APB = 90°$

$\Rightarrow$ ($\overline{AP}$ వాలు) (వాలు $\overline{BP}$) = –1

$\Rightarrow \frac{y-3}{x-2} \cdot \frac{y-5}{x+1} = -1$

$(y-3)(y-5) + (x-2)(x+1) = 0$

$x^2 + y^2 - x - 8y + 13 = 0$

$\therefore$ P(x, y) బిందు పథం $x^2 + y^2 - x - 8y + 13 = 0$

www.sakshieducation.com

వర్గసమాసాలు

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. క్రింది సమీకరణాల మూలాలు కనుక్కోండి.

i) $x^2 - 7x + 12 = 0$

సాధన: $a = 1, \quad b = -7, \quad c = 12$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} = \frac{8}{2}, \frac{6}{2} = 4, 3$$

$\therefore$ మూలాలు 4, 3.

ii) $-x^2 + x + 2 = 0$

సాధన: $a = -1, \quad b = 1, \quad c = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2(-1)} = \frac{-1 \pm 3}{-2} = \frac{-4}{-2} \text{ (or) } \frac{2}{-2} = 2 \text{ (or) } -1$$

$\therefore$ మూలాలు $2, -1$

iii) $2x^2 + 3x + 2 = 0$

సాధన: $a = 2, \quad b = 3, \quad c = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 16}}{4} = \frac{-3 \pm \sqrt{7}i}{4}$$

$\therefore$ మూలాలు $\dfrac{-3 \pm i\sqrt{7}}{4}$

2. క్రింది ఇచ్చిన మూలాలు గల వర్గ సమీకరణాలను రూపొందించండి.

iii) $\dfrac{p-q}{p+q}, \dfrac{-(p+q)}{p-q}, \; (p \neq \pm q)$

సాధన: $$\alpha + \beta = \frac{p-q}{p+q} - \frac{p+q}{p-q} = \frac{p^2 + q^2 - 2pq - p^2 - q^2 - 2pq}{p^2 - q^2} = \frac{-4pq}{p^2 - q^2}$$

$$\alpha\beta = \left(\frac{p-q}{p+q}\right)\left(-\frac{(p+q)}{p=q}\right) = -1$$

కావలసిన వర్గ సమీకరణం

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$x^2 - \left(\frac{-4pq}{p^2 - q^2}\right)x - 1 = 0$$

$$(p^2 - q^2)x^2 + 4pqx - (p^2 - q^2) = 0$$

www.sakshieducation.com

iv) $7 \pm 2\sqrt{5}$

సాధన: $\alpha + \beta = 7 + 2\sqrt{5} + 7 - 2\sqrt{5} = 14$

$\alpha\beta = (7 + 2\sqrt{5})(7 - 2\sqrt{5}) = 49 - 20 = 29$

కావలసిన వర్గ సమీకరణం

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$x^2 - 14x + 29 = 0$

v) $-3 \pm 5i$

సాధన: $\alpha + \beta = -3 + 5i - 3 - 5i = -6$

$\alpha\beta = (-3 + 5i)(-3 - 5i)$

$= 9 + 25$

$= 34$

కావలసిన వర్గ సమీకరణం

$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$

$x^2 + 6x + 34 = 0$

3. క్రింది సమీకరణాలకు మూలాలను కనుక్కోకుండా, మూలాల స్వభావాన్ని కనుక్కోండి.

i) $2x^2 - 8x + 3 = 0$

సాధన: $a = 2$, $b = -8$, $c = 3$

$b^2 - 4ac = 64 - 24$

$= 40 > 0$

$\therefore$ మూలాలు విభిన్న వాస్తవ సంఖ్యలు

ii) $9x^2 - 30x + 25 = 0$

సాధన: $a = 9$, $b = -30$, $c = 25$

$b^2 - 4ac = 900 - 900$

$= 0$

$\therefore$ మూలాలు సమాన అకరణీయ సంఖ్యలు

ii)

$2x^2 - 7x + 10 = 0$

జ: $b^2 - 4ac = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 10 < 0$

$\therefore$ మూలాలు వాస్తవేతర సంఖ్యలు

www.sakshieducation.com

4. $ax^2+bx+c=0$ సమీకరణం మూలాలు α,β అయితే, కింది సమాసాల విలువలను a,b,c లలో కనుక్కోండి

i) $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2$, $c\neq 0$ అయితే

ii) $\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^{-2}+\beta^{-2}}$, $c\neq 0$ అయినపుడు

జ: i) $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 = \frac{\left(\alpha^2-\beta^2\right)^2}{\alpha^2\beta^2}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2}{\alpha^2\beta^2} \qquad =\frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha^2\beta^2}\left[(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right]$$

$$=\frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}\left[\frac{b^2-4ca}{a^2}\right] \qquad =\frac{b^2\left(b^2-4ac\right)}{c^2a^2}$$

ii) $$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^{-2}+\beta^{-2}}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}}=\alpha^2\beta^2=\frac{c^2}{a^2}$$

5. m యొక్క ఏ విలువలకు, ఈ కింది సమీకరణాలకు, సమాన మూలాలు ఉంటాయి?

జ: i) $(2m+1)x^2+2(m+3)x+(m+5)=0$

$b^2-4ac=0$

$4(m+3)^2-4(2m+1)(m+5)=0$

$m^2+6m+9-2m^2-11m-5=0$

$-m^2-5m+4=0$

$m^2+5m-4=0$

$$m=\frac{-5\pm\sqrt{25+16}}{2}$$

$$m=\frac{-5\pm\sqrt{41}}{2}$$

www.sakshieducation.com

6. $x^2+px+q=0$ **సమీకరణం మూలాలు** α,β **అయితే,** $(\alpha-\beta)^2,(\alpha+\beta)^2$ **మూలాలుగా గల సమీకరణాన్ని రూపొందించండి.**

జ: $\alpha+\beta=\frac{-b}{a};\ \ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$$x^2-\left[(\alpha-\beta)^2+(\alpha+\beta)^2\right]x+\ \left[(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)\right]^2=0$$

$$x^2-\left[2(\alpha^2+\beta^2)\right]x+[\alpha+\beta]^2\ \left[(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right]=0$$

$$x^2-2\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\right]x\qquad+(\alpha+\beta)^2\left[(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right]=0$$

$$x^2-2\left[\frac{b^2-2ac}{a^2}\right]x+\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{b^2-4ac}{a^2}\right]=0$$

ఇక్కడ $b=p,\ c=q,\ a=1$

$$x^2-2(p^2-2q)x+p^2(q^2-4q)=0$$

7. $ax^2+bx+c=0$ **సమీకరణం మూలాలు** α,β **అయితే, క్రింది సమాసాల విలువలను** a,b,c **లలో కనుక్కోండి.**

సాధన: α,β సమీకరణ మూలాలు

$ax^2+bx+c=0$

కనుక $\alpha+\beta=\frac{-b}{a},\ \ \alpha+\beta=\frac{-b}{a}$

i) $$\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)}\qquad=-\frac{b}{c}$$

ii) $\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}$

సాధన: $$=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}\qquad=\frac{b^2-2ac}{c^2}$$

iii) $\alpha^4\beta^7+\alpha^7\beta^4$

సాధన: $=\alpha^4\beta^4(\alpha^3+\beta^3)$

$=\alpha^4\beta^4[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)]$

$=(\alpha\beta)^4[(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)]$

www.sakshieducation.com

$$= \left(\frac{c}{a}\right)^4 \left[\left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(\frac{c}{a}\right)\left(-\frac{b}{a}\right)\right] \qquad = \frac{c^4}{a^4}\left[\frac{-b^3+3abc}{a^3}\right] \qquad = \frac{bc^4(3ac+b^2)}{a^7}$$

8. $x^2 - 15 - m(2x-8) = 0$ **సమీకరణానికి సమాన మూలాలు ఉంటే, m విలువలను కనుక్కోండి.**

సాధన: దత్త సమీకరణం $x^2 - 15 - m(2x-8) = 0$

$$x^2 - 2mx + 8m - 15 = 0$$

$a = 1$, $b = -2mc$, $c = 8m - 15$

$b^2 - 4ac = (-2m)^2 - 4(1)(8m-15)$

$= 4m^2 - 32m + 60$

$= 4(m^2 - 8m + 15)$

$= 4(m-3)(m-5)$

సూచన : $ax^2 + bx + c = 0$ కు సమాన మూలాలు ఉంటే, దాని విచక్షణి $= 0$

$\therefore$ మూలాల సమానం $\Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow 4(m-3)(m-5) = 0$

$\Rightarrow m-3) = 0$ or $m - 5 = 0$

$\therefore m = 3$ లేక 5.

9. m **యొక్క ఏ విలువలకు** $(m+1)x^2 + 2(m+3)x + (m+8) = 0$ **సమీకరణానికి సమాన మూలాలు ఉంటాయి ?**

సాధన: $(m+1)x^2 + 2(m+3)x + (m+8) = 0$

$a = m+1$, $b = 2(m+3)$, $c = m+8$

$b^2 - 4ac = [2(m+3)]^2 - 4(m+1)(m+8)]$

$= 4(m^2 + 6m + 9) - 4(m+1)(m+8)]$

$= 4m^2 + 24m + 36 - 4m^2 - 36m - 32 \quad = -12m + 4 \quad = -4(3m-1)$

$\therefore$ మూలాలు సమానం $\Rightarrow b^2 - 4ac = 0$

$\Rightarrow -4(3m-1) = 0 \qquad \Rightarrow 3m - 1 = 0$

$\Rightarrow 3m = 1 \qquad \therefore m = \frac{1}{3}$

10. $(x-a)(x-b) = h^2$ **సమీకరణం మూలాలు ఎల్లప్పుడూ వాస్తవ సంఖ్యలని నిరూపించండి.**

సాధన: దత్త సమీకరణం $(x-a)(x-b) = h^2$

$x^2 - (a+b)x + (ab+h)^2 = 0$

విచక్షణి $= (a+b)^2 - 4(ab - h^2)$

$= (a+b)^2 - 4ab + 4h^2$

www.sakshieducation.com

$=(a-b)^2+(2h)^2>0$

$\therefore$ మూలాలు వాస్తవాలు.

11. మూలాల మొత్తం 7గా, మూలాల వర్గాల మొత్తం 25 గా ఉండే వర్గ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. α,β లు వర్గ సమీకరణానికి మూలాలు అయిన

$\alpha+\beta=7$, $\alpha^2+\beta^2=25$

$\Rightarrow(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=25$

$\Rightarrow 49-25=2\alpha\beta$

$\Rightarrow \alpha\beta=\dfrac{24}{2}=12$

$\therefore$ కావలసిన సమీకరణం

$x^2-(\alpha-\beta)x+\alpha\beta=0$

$x^2-7x+12=0$

12. $x^2+bx+c=0$, $x^2+cx+b=0$ $(b\neq c)$ **లకు ఉమ్మడి మూలం ఉంటే,** $b+c+1=0$ **అని చూపండి.**

జ: $x^2+bx+c=0$

$x^2+cx+b=0$

'α' ఉమ్మడి మూలము అనుకొందాము

$\alpha^2+b\alpha+c=0$

$\alpha^2+c\alpha+b=0$

$\alpha(b-c)+c-b=0$

$\alpha(b-c)=b-c$

$\alpha=1$

$\therefore 1+b+c=0$

13. $ax^2+bx+c=0$ **వర్గసమీకరణం ఒక మూలం, మరో మూలానికి** n **రెట్లు (**n **ధన పూర్ణసంఖ్య) కావడానికి నియమం కనుక్కోండి.**

జ: $\alpha+n\alpha=-b/a$

$\alpha.n\alpha=\dfrac{c}{a}$

$\alpha=\dfrac{-b}{a(n+1)}$

$\dfrac{nb^2}{a^2(n+1)^2}=\dfrac{c}{a}$

$nb^2=ac(n+1)^2$

www.sakshieducation.com

14. వరసగా రెండు ధనాత్మక సరి పూర్ణసంఖ్యల వర్గా మొత్తం 340 అయ్యేటట్లు, రెండు వరస సరి సంఖ్యను కనుక్కోండి.

జ: $2n, 2n+2$

$(2n)^2+(2n+2)^2=340$

$4n^2+4n^2+8n+4=340$

$8n^2+8n+4=340$

$2n^2+2n+1=85$

$2n^2+2n-84=0$

$n^2+n-42=0$

$(n+7)(n-6)=0$

$n=6$

$\therefore$ కావలసిన రెండు సరి సంఖ్యలు = 12, 14

15. మూలాల మొత్తం 7గా, మూలాల వర్గాల మొత్తం 25గా ఉండే వర్గసమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

జ: $\alpha+\beta=7$, $\alpha^2+\beta^2=25$

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=25$

$49-2\alpha\beta=25$

$24=2\alpha\beta$

$x^2-7x+12=0$

16. ఏయే x విలువలకు క్రింది సమాసాలు ధనాత్మకం

i) x^2-5x+6

సాధన: $x^2-5x+6=0$ మూలాలు 2, 3 లు అవి వాస్తవాలు

$x<2$ లేదా $x>3$ అయిన x^2-5x+6 ధనాత్మకం

$\because a=1>0$

17. R మీద x మారుతున్నప్పుడు క్రింది సమాసాల గరిష్ఠ లేదా కనిష్ఠ విలువలను కనుక్కోండి.

i) x^2-x+7

సాధన: $a=1>0$, కనిష్ఠ విలువ $=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

$=\dfrac{28-1}{4}=\dfrac{27}{4}$

ii) $12x-x^2-32$

సాధన: $a=-1<0$, గరిష్ఠ విలువ $=\dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{128-144}{-4}=\dfrac{16}{4}=4$

www.sakshieducation.com

18. x **వాస్తవ సంఖ్య అయినప్పుడు కింది వర్గ సమాసాల గుర్తులను చర్చించండి**

జ: x^2-x+3

x^2-x+3

$f(x)=x^2-x+3$

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+3-\frac{1}{4}$$

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{11}{4}$$

$y-\frac{11}{4}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$ విచక్షణి $=1-12<0$

$f(x)>0\forall x\in R$

19. ఏయే x **విలువలకు, కింది సమాసాలు ధనాత్మకం?**

$i)\ 3x^2+4x+4 \quad ii)\ 4x-5x^2+2$

జ: $f(x)=3x^2+4x+4$

$f(x)>0$

$3x^2+4x+4>0$

$$x^2+\frac{4}{3}x+\frac{4}{3}>0$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{4}{3}-\frac{4}{9}>0$$

$$\left(x+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{9}>0\forall x\in R$$

$ii)\quad f(x)=4x-5x^2+2$

$=-\left[5x^2-4x-2\right]$

$$=-5\left[\left(x^2-\frac{4}{5}x-\frac{2}{5}\right)\right]$$

$$=-5\left[\left(\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{4}{25}-\frac{2}{5}\right)\right]$$

$$=-5\left[\left(\left(x-\frac{2}{5}\right)^2-\frac{14}{25}\right)\right]$$

$4x-5x^2+2>0$

$5x^2-4x-2<0$

www.sakshieducation.com

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+40}}{10}$$

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{14}}{10}$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{14}}{5}$$

$$\frac{2-\sqrt{14}}{5} < x < \frac{2+\sqrt{14}}{5}$$

20. ఏయే x విలువలకు, కింది సమాసాలు రుణాత్మకం?

$i)\ 15+4x-3x^2 \quad ii)\ 2x^2+5x-3$

జ: $i)\ f(x)=15+4x-3x^2$

$f(x)<0$

$15+4x-3x^2<0$

$3x^2-4x-15>0$

$3x^2-9x+5x-15>0$

$3x(x-3)+5(x-3)>0$

$(x-3)(3x+5)>0$

$$x>3x<\frac{-5}{3}$$

$$\left(-\infty<x<\frac{-5}{3}\right)\cup\left(3<x<\infty\right)$$

$ii)\ f(x)=2x^2+5x-3$

$f(x)<0$

$2x^2+5x-3<0$

$2x^2+6x-x-3<0$

$2x(x+3)-1(x+3)<0$

$(2x-1)(x+3)<0$

$$-3<x<\frac{1}{2}$$

21. కింది అసమీకరణాలను బీజీయ పద్ధతిలో సాధించండి.

$i)\ 15x^2+4x-4\le 0 \qquad ii)\ x^2-2x+1<0$

జ: $i)\ 15x^2+4x-4\le 0$

$15x^2+10x-6x-4\le 0$

$5x(3x+2)-2(3x+2)\le 0$

$(3x+2)(5x-2)\le 0$

www.sakshieducation.com

$\left(x+\frac{2}{3}\right)\left(x-\frac{2}{5}\right)\le 0$

$\frac{-2}{3}\le x\le \frac{2}{5}$

$ii) x^2-2x+1<0$

$(x-1)^2<0$

$(x-1)^2\ge 0$ కావున ఇది అసాధ్యము

$\therefore$ సాధన వ్యవస్థితం కాదు

22. $x^2-2ax+8a-15=0$ **సమీకరణం మూలాలు సమానమైన, $'a'$ విలువను కనుగోనుము** (Mar 04)

సాధన: ఇచ్చట $a=1,\ b=-2a,\ c=8a-15$

మూలాలు సమానం కనుక $\Delta=0$

(i.e.,) $b^2-4ac=0$

$\Rightarrow (-2a)^2-4(1)(8a-15)=0$

$\Rightarrow 4a^2-32a+60=0$

$\Rightarrow a^2-8a+15=0$

$\Rightarrow (a-3)(a-5)=0$

$\Rightarrow a=3$ లేదా 5

19. **ఏయే** k **విలువలకు** $x^2+2(k+2)x+9k=0$ **సమీకరణం మూలాలు సమానమవుతాయి ?**

సాధన: $\because x^2+2(k+2)x+9k=0$ సమీకరణం మూలాలు సమానం

$\Rightarrow$ విచక్షణి $\Delta=0$

(i.e.,) $b^2-4ac=0$

ఇచ్చట $a=1,\ b=2(k+2),\ c=9k$

$\therefore [2(k+1)]^2-4(1)(9k)=0$

$\Rightarrow 4(k+2)^2-4(9k)=0$

$\Rightarrow (k+2)^2-9k=0$

$\Rightarrow k^2-5k+4=0$

$\Rightarrow (k-1)(k-4)=0$

$\Rightarrow k=1,4$

$\therefore k$ విలువలు $=\{1,4\}$

www.sakshieducation.com

23. మూలాల మొత్తం 1, వాటి వర్గాల మొత్తం 13 గా గల వర్గ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన: వర్గ సమీకరణానికి మూలాలు, α, β లు అనుకుంటే, అప్పుడు $\alpha + \beta = 1, \ \alpha^2 + \beta^2 = 13$

$$\therefore \alpha\beta = \frac{1}{2}[(\alpha+\beta)^2 - (\alpha^2+\beta^2)]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(1)^2 - (13)\right]$$

$$= -6$$

$\therefore$ కావలసిన వర్గ సమీకరణం

$$x^2 = (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - (1)x + (-6) = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6 = 0$$

23. m **యొక్క ఏయే విలువలకు** $x^2 - 2(1+3m)x + 7(3+2m) = 0$ **సమీకరణం మూలాలు సమానమౌతాయి?**

జ: దత్త సమీకరణం విచక్షణి సున్న అయితేనే ఆ సమీకరణ మూలాలు సమానమౌతాయి.

ఇక్కడ $\Delta = \{-2(1+3m)\}^2 - 4(1)7(3+2m)$

$$= 4(1+3m)^2 - 28(3+2m)$$

$$= 4(9m^2 - 8m - 20)$$

$$= 4(m-2)(9m+10)$$

$$= 36(m-2)\left(m + \frac{10}{9}\right)$$

కాబట్టి $\Delta = 0 \Leftrightarrow m = 2$ లేదా $m = -\frac{10}{9}$

$\therefore m \in \left\{-\frac{10}{9}, 2\right\}$ అయినప్పుడు మాత్రమే దత్త సమీకరణం మూలాలు సమానమవుతాయి.

www.sakshieducation.com

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $ax^2+bx+c=0$ వర్గసమీకరణం మూలాలు x_1, x_2 లు $c \neq 0$ అయితే $(ax_1+b)^{-2}+(ax_2+b)^{-2}$ సమానం విలువను a, b, c లలో కనుక్కోండి

జ: $ax_1^2+bx_1+c=0$

$x_1(ax_2+b)+c=0$

$(ax_1+b)=\frac{-c}{x_1}$

అలాగే $(ax_2+b)=\frac{-c}{x_2}$

$\therefore (ax_1+b)^{-2}+(ax_2+b)^{-2} \quad = \frac{x_1^2+x_2^2}{c^2} \quad = \frac{1}{c^2}\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]$

$= \frac{1}{c^2}\left[\frac{b^2-2ac}{a^2}\right] = \frac{b^2-2ac}{a^2c^2}$

2. $3^{1+x}+3^{1-x}=10$

జ: $3^x=t$ అనుకొనుము

$3.t+\frac{3}{t}=10$

$3t^2+3-10t=0$

$3t^2-10t+3=0$

$3t^2-9t-t+3=0$

$3t(t-3)-1(t-3)=0$

$(3t-1)(t-3)=0$

$t=\frac{1}{3}, \; t=3$

$3^x=3^{-1}, \; 3^x=3^1$

$\therefore x=-1,1$

3. $x \neq 0, \; x \neq -1$ అయినప్పుడు $\sqrt{\frac{3x}{x+1}}+\sqrt{\frac{x+1}{3x}}=2$

జ: $\sqrt{\frac{3x}{x+1}}=t$ అనుకొనుము

$t+\frac{1}{t}=2$

$t^2-2t+1=0$

$(t-1)^2=0$

$t=1$

www.sakshieducation.com

$$\frac{3x}{x+1}=1$$

$$3x=x+1$$

$$\therefore x=\frac{1}{2}$$

4. $x\neq 0$ **అయినప్పుడు**

$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0.$$

జ: $$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2-5\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$$

$x+\frac{1}{x}=t$ అనుకొనుము

$$t^2-5t+4=0$$

$$(t-4)(t-1)=0$$

$$t=4,1$$

$x+\frac{1}{x}=4$ $x+\frac{1}{x}=1$

$x^2-4x+1=0$ $x^2-x+1=0$

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}$ $x=\frac{1\pm\sqrt{1-4}}{2}$

$x=2\pm\sqrt{3}$ $x=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

5. $ax^2+2bx+c=0$, $ax^2+2cx+b=0$, $(b\neq c)$ **వర్గ సమీకరణాలకు ఉమ్మడి మూలం ఉంటే, అప్పుడు** $a+4b+4c=0$ **అని చూపండి**

సాధన: $ax^2+2bx+c=0$

$ax^2+2cx+b=0$ లకు ఉమ్మడి మూలం అనుకుంటే

$$a\alpha^2+2b\alpha+c=0\text{...............}(1)$$

$$a\alpha^2+2c\alpha+b=0\text{...............}(2)$$

$$(1)-(2)\Rightarrow 2\alpha(b-c)+c-b=0$$

$$2\alpha(b-c)=b-c$$

$$2\alpha=\frac{b-c}{b-c}=1,\ \because b\neq c$$

$$\alpha=\frac{1}{2}$$

www.sakshieducation.com

$\alpha = \frac{1}{2}$ ను (1) లో ప్రతిక్షేపించగా

$ax^2 + 2bx + c = 0$

$a\left(\frac{1}{4}\right) + 2b\frac{1}{2} + c = 0$

$\Rightarrow a + 4b + 4c = 0$

$\therefore a + 4b + 4c = 0$

ఇదియే కావలసిన నియమం

6. $x^2 - 6x + 5 = 0$, $x^2 - 12x + p = 0$ **లకు ఉమ్మడి మూలం ఉంటే,** p **కనుక్కోండి.**

సాధన: $x^2 - 6x + 5 = 0$

$x^2 - 12x + p = 0$ లకు ఉమ్మడి మూలం α అనుకుంటే అప్పుడు

$\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0$, $\alpha^2 - 12\alpha + p = 0$

$\alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0 \Rightarrow (\alpha - 1)(\alpha - 5) = 0$

$\Rightarrow \alpha = 1$ లేదా 5

$\alpha = 1$ అయిన $\alpha^2 - 12\alpha + p = 0$

$\Rightarrow 1 - 12 + p = 0 \Rightarrow p = 11$

$\alpha = 5$ అయిన $\alpha^2 - 12\alpha + p = 0$

$\Rightarrow 25 - 60 + p = 0 \Rightarrow p = 35$

$\therefore p = 11$ లేదా 35

7. $x^2 + ax + b = 0$, $x^2 + cx + d = 0$ **లకు ఉమ్మడి మూలము ఉండి, మొదటి సమీకరణానికి సమాన ములాలుంటే, అపుడు** $2(b + d) = ac$ **అని నిరూపించండి.**

సాధన: ఉమ్మడి మూలం α అనుకుంటే

$x^2 + ax + b = 0$ కు మూలాలు సమానం కనుక α, α లు దీని మూలాలు

$\alpha + \alpha = -a \Rightarrow \alpha = -\frac{a}{2}$

$\alpha.\alpha = b \Rightarrow \alpha^2 = b$

$\therefore x^2 + cx + d = 0$ కు α మూలం కనుక

$\Rightarrow \alpha^2 + \alpha + d = 0$

$\Rightarrow b + c\left(-\frac{a}{2}\right) + d = 0$

$\Rightarrow 2(b + d) = ac$

www.sakshieducation.com

8. క్రింది సమాసాల వ్యాప్తిని నిర్ణయించండి.

i) $\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$

సాధన $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ అనుకోండి.

$\Rightarrow x^2y-xy+y=x^2+x+1$

$\Rightarrow x^2y-xy+y-x^2-x-1=0$

$\Rightarrow x^2(y-1)-x(y+1)+(y-1)=0$

x వాస్తవం $\Rightarrow b^2-4ac\geq 0$

$\Rightarrow (y+1)^2-4(y-1)^2\geq 0$

$\Rightarrow (y+1)^2-(2y-2)^2\geq 0$

$\Rightarrow (y+1+2y-2)(y+1-2y+2)\geq 0$

$\Rightarrow (3y-1)(y+3)\geq 0$

$\Rightarrow -(3y-1)(y-3)\geq 0$

$a=y^2$ గుణకం $=-3<0$

కాని సమాసం ≥ 0

$\Rightarrow$ y విలువ $\dfrac{1}{3},3$ ల మధ్య ఉంటుంది.

$\therefore \dfrac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$ వ్యాప్తి $\left[\dfrac{1}{3},3\right]$

ii) $\dfrac{x+2}{2x^2+3x+6}$

సాధన: $y=\dfrac{x+2}{2x^2+3x+6}$ అనుకోండి.

అప్పుడు $2yx+3yx+6y=x+2$

$\Rightarrow 2yx^2+(3y-1)x+(6y-2)=0$

x వాస్తవాలు $\Rightarrow$ విచక్షణి ≥ 0

$\Rightarrow (3y-1)^2-4(2y)(6y-2)\geq 0$

$\Rightarrow 9y+1-6y-48y^2+16y\geq 0$

$\Rightarrow -39y^2+10y+1\geq 0$

$\Rightarrow 39y^2-10y-1<0$

$\Rightarrow 39y^2-13y+3y-1<0$

$\Rightarrow 13y(3y-1)+1(3y-1)\leq 0$

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow (3y-1)(13y+1) \le 0$

$\therefore a = y^2$ గుణకం $= 39 > 0$ సమాసము ≤ 0

$\Rightarrow y$ విలువ $\frac{-1}{13}, \frac{1}{3}$ లచే మధ్య ఉంటుంది.

$\therefore$ కనుక $\frac{x+2}{2x^2+3x+6}$ వ్యాప్తి $\left[-\frac{1}{13}, \frac{1}{3}\right]$

iv) $\frac{2x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$

$y = \frac{2x^2-6x+5}{x^2-3x+2}$

$\Rightarrow yx^2 - 3yx + 2y = 2x^2 - 6x + 5$

$\Rightarrow (y-2)x^2 + (6-3y)x + (2y-5) = 0$

$x \in R \Rightarrow (6-3y)^2 - 4(y-2)(2y-5) \ge 0$

$\Rightarrow 36 + 9y^2 - 36y - 4(2y^2 - 9y + 10) \ge 0$

$\Rightarrow 36 + 9y^2 - 36y - 8y^2 + 36y - 40 \ge 0$

9. x **వాస్తవ సంఖ్య అయితే** $\frac{1}{3x+1} + \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(3x+1)(x+1)}$ **విలువ 1, 4 ల మధ్య ఉండదని నిరూపించండి.**

సాధన: $y = \frac{1}{3x+1} + \frac{1}{x+1} = \frac{1}{(3x+1)(x+1)}$ అనుకోండి.

$= \frac{x+1+3x+1-1}{(3x+1)(x+1)} = \frac{4x+1}{3x^2+4x+1}$

$\Rightarrow 3yx^2 + 4yx + y = 4x + 1$

$\Rightarrow 3yx^2 + (4y-4)x + (y-1) = 0$

$x \in R \Rightarrow (4y-4)^2 - 4(3y)(y-1) \ge 0$

$\Rightarrow 16y^2 + 16 - 32y - 12y^2 + 12y \ge 0$

$\Rightarrow 4y^2 - 20y + 16 \ge 0$

$4y^2 - 20y + 16 = 0$

$\Rightarrow y^2 - 5y + 4 = 0$

$\Rightarrow (y-1)(y-4) = 0 \Rightarrow y = 1, 4$

$4y^2 - 20y + 16 \ge 0 \Rightarrow y \le 1$ లేదా $y \ge 4$

$\therefore y^2$ గుణకం, సమాసం ≥ 0

$\Rightarrow y$ విలువ 1, 4 ల మధ్య ఉండదు.

www.sakshieducation.com

10. x వాస్తవ సంఖ్య అయితే, $\frac{x}{x^2-5x+9}$ విలువ $1, \frac{-1}{11}$ ల మధ్య ఉంటుందని నిరూపించండి.

సాధన: $y=\frac{x}{x^2-5x+9} \Rightarrow yx^2-5yx+9y=x$

$\Rightarrow yx^2+(-5y-1)x+9y=0$

$x\in R \Rightarrow (-5y-1)^2-4y(9y)\geq 0$

$\Rightarrow 25y^2+1+10y-36y^2\geq 0$

$\Rightarrow -11y^2+10y+1\geq 0$..........(1)

$-11y^2+10y+1=0 \Rightarrow -11y^2+11y-y+1=0$

$\Rightarrow 11y(-y+1)+1(-y+1)=0$

$\Rightarrow (-y+1)(11y+1)=0 \Rightarrow y=1, \frac{-1}{11}$

$-11y^2+10y+1\geq 0$

$\therefore y^2$ గుణకం $-ve$, సమాసం ≥ 0

(1) నుండి $\frac{-1}{11}\leq y\leq 1$

$\Rightarrow y$ విలువ, $1, \frac{-1}{11}$ ల మధ్య ఉంటుంది.

11. R లోని ప్రతి x కి $\frac{x-p}{x^2-3x+2}$ సమాసం వాస్తవ మైతే, అప్పుడు p అవధులను కనుక్కోండి.

సాధన: $y=\frac{x-p}{x^2-3x+2}$ (y వాస్తవం)

అపుడు $yx^2-3yx+2y=x-p$

$\Rightarrow yx^2+(-3y-1)x+(2y+p)=0$

$\therefore x\in R \Rightarrow (-3y-1)^2-4y(2y+p)\geq 0$

$\Rightarrow 9y^2+6y+1-8y^2-4py\geq 0$

$\Rightarrow y^2+(6-4p)y+1\geq 0$

$\therefore y\in R,\ \ y^2+(6-4p)y+1\geq 0$

$\Rightarrow$ మూలాలు సంకీర్ణ సంఖ్యలు లేదా సమాన వాస్తవాలు

$\Rightarrow \Delta\leq 0$

$\Rightarrow (6-4p)^2-4\leq 0$

$\Rightarrow 4(3-2p)^2-4\leq 0$

$\Rightarrow (3-2p)^2-1\leq 0$

$\Rightarrow 4p^2-12p+8\leq 0$

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow p^2 - 3p + 2 \le 0$

$\Rightarrow (p-1)(p-2) \le 0$

$p = 1$ లేదా $p = 2$ అయిన $\frac{x-p}{x^2-3x+2}$ నిర్వచితం కాదు.

$\therefore 1 < p < 2$.

12. కింది సమాసాల గుర్తులలో మార్పులను కనుక్కోండి. వాటి అంత్య విలువలను కనుక్కోండి.

$i)\ x^2 - 5x + 6 \quad ii)\ 15 + 4x - 3x^2$

జ: $i)\ f(x) = x^2 - 5x + 6$

$= (x-3)(x-2)$

$f(x) < 0$

$2 < x < 3$

మరియు $f(x) > 0$

$(-\infty < x < 2) \cup (3 < x < \infty)$

$y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 6 - \frac{25}{4}$

$y_{\text{కనిష్ఠం}} = \frac{-1}{4}$

$ii)\ f(x) = 15 + 4x - 3x^2$

$f(x) < 0$

$15 + 4x - 3x^2 < 0$

$3x^2 - 4x - 15 < 0$

$3x^2 - 9x + 5x - 15 < 0$

$3x(x-3) + 5(x-3) < 0$

$(x-3)(3x+5) < 0$

$\frac{-3}{5} < x < 3$

$f(x) > 0$

$\left(-\infty < x < \frac{-3}{5}\right) \cup (3 < x < \infty)$

$y = 15 + 4x - 3x^2$

$y = -3\left[x^2 - \frac{4}{3}x - 5\right]$

$y = -3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9} - 5\right]$

www.sakshieducation.com

$$y=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{49}{9}.3$$

$$y=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{49}{9}$$

$$y_{\text{కనిష్ఠం}}=\frac{49}{3}$$

13. $c^2 \neq ab$ **అయి,** $\left(c^2-ab\right)x^2-2\left(a^2-bc\right)x+\left(b^2-ac\right)=0$ **సమీకరణం మూలాలు సమానమైతే, అప్పుడు** $a^3+b^3+c^3=3abc$ **లేదా** $a=0$ **అని చూపండి.**

జ: మూలాల సమానం $\Rightarrow$ విచక్షణి $=0$

$$4\left(a^2-bc\right)^2-4\left(c^2-ab\right)\left(b^2-ac\right)=0$$

$$a^4+b^2c^2-2a^2bc-b^2c^2+$$

$$c^3a+b^3a-a^2bc=0$$

$$a^4-2a^2bc+c^3a+b^3a-a^2bc=0$$

$$a\left[a^3+b^3+c^3-3abc\right]=0$$

$a^3+b^3+c^3-3abc=0$ లేదా $a=0$

$a^3+b^3+c^3=3abc$ లేదా $a=0$

14. కింది అసమీకరణాలను సాధించండి.

$i)$ $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$

జ: $-x^2+6x-5\geq 0$ అయినప్పుడే ఇది సాధ్యము

$$x^2-6x+5\leq 0$$

$$(x-5)(x-1)\leq 0$$

$$1\leq x\leq 5\text{..........(1)}$$

$$-x^2+6x-5>64+4x^2-32x$$

$$0>5x^2-38x+64+5$$

లేదా $5x^2-38x+69<0$

$$5x^2-23x-15x+69<0$$

$$5x(x-3)-23(x-3)<0$$

$$(x-3)(5x-23)<0$$

$$3<x<\frac{23}{5}\text{.........(2)}$$

(1), (2) ల నుండి,

$$3<x\leq 5$$

www.sakshieducation.com

15. $ax^2+bx+c=0$ **వర్గ సమాకరణానికి మూలాలు** $\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ **అని చూపండి.** (Mar 02)

సాధన: వర్గ సమీకరణం $ax^2+bx+c=0$

$\Rightarrow 4a(ax^2+bx+c)=0$

$\Rightarrow 4a^2x^2+4abx+b^2-b^2+4ac=0$

$\Rightarrow (2ax+b)^2=b^2-4ac$

$\Rightarrow 2ax+b=\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$\Rightarrow 2ax=-b\pm\sqrt{b^2-4ac}$

$\therefore x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\therefore ax^2+bx+c=0$ కు మూలాలు

$\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

16. $ax^2+bx+c=0$ **కు మూలాలు సంకీర్ణ సంఖ్యలు అయిన** x **యొక్క అన్ని వాస్తవ విలువలకు,** ax^2+bx+c**,** a **లకు ఒకే గుర్తులు ఉంటాయని చూపండి.**

సాధన: $ax^2+bx+c=0$ కు మూలాల సంకీర్ణ సంఖ్యలు కనుక $\Delta<0$

$(i.e.,) b^2-4ac<0 \Rightarrow 4ac-b^2>0$

$\dfrac{ax^2+bx+c}{a}=x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}$

$=x^2+2.\dfrac{b}{2a}x+\left(\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2}{4a^2}+\dfrac{c}{a}$

$=\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a^2}>0,\quad \forall x\in R$

$\therefore \forall x\in R,\ ax^2+bx+c,\ a$ లకు ఒకే గుర్తు ఉంటాయి.

www.sakshieducation.com

17. α, β **లు** $ax^2+bx+c=0$ **కు వాస్తవ మూలాలు మరియు** $\alpha<\beta$ **అయిన**

i) $\alpha<x<\beta$ **అయినపుడు** ax^2+bx+c, a **లకు వ్యతిరేక గుర్తులు ఉంటాయి.**

ii) $x<\alpha$ **లేదా** $x>\beta$ **అయినపుఢు** ax^2+bx+c, a **లకు ఒకే గుర్తు ఉంటుంది.**

సాధన: α, β లు $ax^2+bx+c=0$ కు మూలాలు కనుక

$ax^2+bx+c=a(-\alpha)(x-\beta)$

$$\Rightarrow \frac{ax^2+bx+c}{a}=(x-\alpha)(x-\beta)$$

i) $\alpha<x<\beta \Rightarrow x-\alpha>0,\ \ x-\beta<0$

$$\Rightarrow \frac{ax^2+bx+c}{a}<0$$

$\Rightarrow ax^2+bx+c$, a లకు వ్యతిరేక గుర్తులు ఉంటాయి.

ii) $x<\alpha$

$\therefore \alpha<\beta \Rightarrow x<\alpha<\beta$

$\Rightarrow x-\alpha<0, x-\beta<0$

$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)>0$

$$\Rightarrow \frac{ax^2+bx+c}{a}>0$$

$\Rightarrow ax^2+bx+c, a$

$x>\beta,\ \therefore \alpha<\beta,\ x>\beta \Rightarrow x>\beta>\alpha$

$\Rightarrow (x-\beta)>0,\ x-\alpha>0$

$\Rightarrow (x-\alpha)(x-\beta)>0$

$$\Rightarrow \frac{ax^2+bx+c}{a}>0$$

$\Rightarrow ax^2+bx+c,\ a$ లకు ఒకే గుర్తు ఉంటాయి.

$\therefore x<\alpha$ లేదా $x>\beta$ అయిన ax^2+bx+c, a లకు ఒకే గుర్తు ఉంటుంది.

www.sakshieducation.com

18. x, R **మీద** $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ **యొక్క ఏ విలవలూ 5, 9 ల మధ్య ఉండవని చూపండి.** (Mar 05)

సాధన: $y=\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ అనుకుందాం.

$\Rightarrow x^2y+2xy-7y=x^2+34x-71$

$\Rightarrow (y-1)x^2+2(y-17)x+(71-7y)=0$

$\therefore x\in R \Rightarrow \Delta \geq 0$

(i.e.,) $b^2-4ac\geq 0$

$\Rightarrow [2(y-17)]^2-4(y-1)(71-7y)\geq 0$

$\Rightarrow (y-17)^2-(y-1)(71-7y)\geq 0$

$\Rightarrow y^2-34y+289-(-7y^2+78y-71)\geq 0$

$\Rightarrow 9y^2-112y+360\geq 0$

$\Rightarrow y^2-14y+45\geq 0$

$\Rightarrow (y-5)(y-9)\geq 0$

y^2 గుణకం $=1>0,\ \ y^2-14y+45\geq 0$

$y\geq 5$ లేదా $y\geq 9$

$\Rightarrow y$ విలువ 5, 9 ల మధ్య వుండదు.

19. α,β **లు** $2x^2+x+3=0$ **కు మూలాలు, అయిన** $\frac{1-\alpha}{1+\alpha}, \frac{1-\beta}{1+\beta}$ **లు మూలాలుగా గల వర్గ సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.** (Mar 03)

సాధన: α,β లు $2x^2+x+3=0$ కు మూలాలు కనుక

$\alpha+\beta=-\frac{1}{2},\ \ \alpha\beta=\frac{3}{2}$

మూలాల మొత్తం $=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}+\frac{1-\beta}{1+\beta}$

$=\frac{(1-\alpha)(1+\beta)+(1-\beta)(1+\alpha)}{(1+\alpha)(1+\beta)}$

$=\frac{1-\alpha+\beta-\alpha\beta++1-\beta+\alpha-\alpha\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta}$

$=\frac{2-2\alpha\beta}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}=\frac{2-2\left(\frac{3}{2}\right)}{1\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}}$

www.sakshieducation.com

$$= \frac{-1}{2}$$

మూలాల లబ్ధం $= \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)$

$$= \frac{1-\alpha-\beta+\alpha\beta}{1+\alpha+\beta+\alpha\beta} = \frac{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}{1+(\alpha+\beta)+\alpha\beta}$$

$$= \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{1-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}$$

$\therefore$ కావలసిన వర్గ సమీకరణం

$x^2 -$(మూలాల మొత్తం) $x +$ మూలాల లబ్ధం $= 0$

$$\Rightarrow x^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)x + \frac{3}{2} = 0$$

$$\therefore 2x^2 + x + 3 = 0$$

20. x **వాస్తవం అయిన** $6x^2 + x - 2$ **సమానపు గుర్తులలో మార్పులను కనుక్కోండి.**

సాధన: వర్గ సమీకరణం $6x^2 + x - 2 = 0$

$$\Rightarrow 6x^2 + 4x - 3x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow 2x(3x+2) - 1(3x+2) = 0$$

$$\Rightarrow (2x-1)(3x+2) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}$$

$\because a = 6 > 0$

$-\frac{2}{3} < x < \frac{1}{2}$ అయినపుడు

$6x^2 + x - 2$ ఋణాత్మకం

$x < -\frac{2}{3}$ లేదా $x > \frac{1}{2}$ అయినపుడు $6x^2 + x - 2$ ధనాత్మకం

www.sakshieducation.com

21. $ax^2+bx+c=0$ **సమీకరణం మూలాలు** α,β **అయితే,** $\alpha^2+\beta^2, \alpha^3+\beta^3$ **విలువలను** a,b,c **లలో కనుక్కోండి**

జ: దత్తాంశం నుంచి

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2(\alpha\beta)$$

$$=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)=\frac{b^2}{a^2}-\frac{2ac}{a^2}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$$

$$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta)$$

$$=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-\alpha\beta\right]$$

$$=(\alpha+\beta)\left[(\alpha+\beta)^2-3(\alpha\beta)\right]$$

$$=\left(-\frac{b}{a}\right)\left[\left(\frac{-b}{a}\right)^2-3\left(\frac{c}{a}\right)\right]$$

$$=-\frac{b}{a}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{3c}{a}\right)=\frac{3abc-b^3}{a^3}$$

22. $ax^2+bx+c=0$ **వర్గ సమీకరణం మూలాలు** α,β **అనుకొందాం.** $c\neq 0$ **అయితే అప్పుడు** $\frac{1-\alpha}{\alpha},\frac{1-\beta}{\beta}$ **లను మూలాలుగా గల సమీకరణాన్ని రూపొందించండి.**

జ: దత్తాంశం నుంచి $\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \ \alpha\beta=\frac{c}{a}$

$c\neq 0, \alpha\neq 0, \beta\neq 0$ అయినందువల్ల

$$\frac{1-\alpha}{\alpha}+\frac{1-\beta}{\beta}=\frac{\beta(1-\alpha)+\alpha(1-\beta)}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{\alpha+\beta-2\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}-2=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)}-2$$

$$=-\frac{b}{c}-2=-\left(2+\frac{b}{c}\right)$$

www.sakshieducation.com

$$\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)\left(\frac{1-\beta}{\beta}\right)=\frac{1-(\alpha+\beta)+\alpha\beta}{\alpha\beta}$$

$$=\frac{1-\left(-\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{c}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)}=\frac{a+b+c}{c}$$

23. $ax^2+bx+c=0$, $bx^2+cx+a=0$ **వర్గ సమీకరణాలకు ఉమ్మడి మూలం ఉందని అనుకోండి. అప్పుడు** $a^3+b^3+c^3=3abc$ **అని చూపండి.**

జ: $a_1x^2+b_1x+c_1=0,\ a_2x^2+b_2x+c_2=0$

వర్గ సమీకరణాలకు ఉమ్మడి మూలం ఉండటానికి నియమం

$(c_1a_2-c_2a_1)^2=(a_1b_2-a_2b_1)(b_1c_2-b_2c_1)$

ఇక్కడ $a_1=a,\ b_1=b,\ c_1=c,\ a_2=b,\ b_2=c,\ c_2=a$

అందువల్ల $(cb-a^2)^2=(ac-b^2)(ba-c^2)$

$\Rightarrow b^2c^2-2a^2bc+a^4$

$=a^2bc-ac^3-b^3a+b^2c^2$

$\Rightarrow a^4+ab^3+ac^3=3a^2bc$

$a^3+b^3+c^3=3abc$ ($a\neq 0$ కనుక)

www.sakshieducation.com

డీమాయర్ సిద్ధాంతం

Very Short Answer Questions

1. **n** పూర్ణాంకం అయితే $(1+i)^{2n}+(1-i)^{2n}=2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$ అని చూపండి.

Solution : -

$1+i=r\{\cos\theta+i\sin\theta\}$ అనుకొనుము.

$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=2\Rightarrow r=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\ \ \sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\ P.V\ of\ \theta=\pi/4$

$\therefore 1+i=\sqrt{2}\left\{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right\}$ ఇదేవిధంగా $(1-i)=\sqrt{2}\left\{\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right\}$

$$(1+i)^{2n}+(1-i)^{2n}=\left(\sqrt{2}\right)^{2n}\left\{\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right\}^{2n}+\left(\sqrt{2}\right)^{2n}\left\{\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right\}^{2n}$$

$=2^n\left\{\cos\frac{2n\pi}{4}+i\not{\sin}\frac{2n\pi}{4}\cos\frac{2n\pi}{4}-i\not{\sin}\frac{2n\pi}{4}\right\}$

$=\ 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{2}$

2. ఈ క్రింది వాని విలువలను కనుగొనుము

(i) $\left(1+i\sqrt{3}\right)^3$

Solution : -

$1+i\sqrt{3}=2\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\pi/3\right\}$

$\left(1+1\sqrt{3}\right)^3=8\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\pi/3\right\}^3$

$=8\{\cos\pi+i\sin\pi\}\quad\left\{\because(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta\right\}$

$=8\{-1+0\}=-8$

sakshieducation.com

(ii) $(1-i)^8$

Solution $(1-i)^8 = \left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)^8 = \left(\sqrt{2}\left\{\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right\}\right)^8 = 2^4\{\cos 2\pi - i\sin 2\pi\}$

(iii) $(1+i)^{16}$

Solution $(1+i)^{16} = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{16} = 2\{\cos 2\pi + i\sin 2\pi\}$

$= 256$

(iv) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^5 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^3$

Solution . $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^5 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right)^5$

$\left\{\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right\}^5 - \left\{\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right\}^5$

$\cancel{\cos\frac{5\pi}{6}} + i\sin\frac{5\pi}{6} - \cancel{\cos\frac{5\pi}{6}} + 1\sin\pi/6$

$2i\sin\frac{5\pi}{6} = (\cancel{2}i)\frac{1}{\cancel{2}} = i$

3. $(1-i\sqrt{3})^{\frac{1}{3}}$ యొక్క అన్ని విలువలను కనుగొనుము

$(1-i\sqrt{3})^{\frac{1}{3}} = \left\{2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$

$= \left\{2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{1}{3}}\left\{\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{\frac{1}{3}}\left\{\cos\frac{\left(2k\pi - \frac{\pi}{3}\right)}{3} + isn\left(\frac{2k\pi - \frac{\pi}{3}}{3}\right)\right\} \quad k = 0, 1, 2$

$= 3\sqrt{2}\, cis(6k-1)\frac{\pi}{9} \quad k = 0, 1, 2$

sakshieducation.com

4. $(-i)^{\frac{1}{6}}$ యొక్క అన్ని విలువలను కనుగొనుము

Solution : -

$$(-i)^{\frac{1}{6}} = \left\{\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right\}^{\frac{1}{6}}$$

$$= cis\left(\frac{2k\pi - \pi/2}{6}\right) k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$\therefore (-1)^{\frac{1}{6}} = cis(4k-1)\frac{\pi}{12} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

5. $(1+i)^{2/3}$ యొక్క అన్ని విలువలను కనుగొనుము

$$(1+i)^{2/3} = \left[\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + 1\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^{2}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$= \left\{2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\pi/2\right)\right\}^{\frac{1}{3}}$$

$$= 2^{\frac{1}{3}}\, cis\left(\frac{2k\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right) k = 0, 1, 2$$

$$= 2^{\frac{1}{3}}\, cis(4k+1)\frac{\pi}{6}\, k = 0, 1, 2$$

6. $(-16)^{\frac{1}{4}}$ యొక్క అన్ని విలువలను కనుగొనుము

$$(-16)^{\frac{1}{4}} = (2^4)^{\frac{1}{4}}(-1)^{\frac{1}{4}}$$

$$= 2(cis\pi)^{\frac{1}{4}} = 2cis\left(\frac{2k\pi + \pi}{4}\right) k = 0, 1, 2, 3$$

$$= 2cis(2k+1)\frac{\pi}{4} \quad k = 0, 1, 2, 3$$

7. $(-32)^{\frac{1}{5}}$ యొక్క అన్ని విలువలను కనుగొనుము

$$(-32)^{\frac{1}{5}} \quad (2^5)^{\frac{1}{5}}(-1)^{\frac{1}{5}} = 2\{\cos\pi + i\sin\pi\}^{\frac{1}{5}}$$

8. $1, \omega, \omega^2$ లు **1** యొక్క సంకీర్ణ ఘన మూలాలు అయితే $\frac{1}{2+\omega} + \frac{1}{1+2\omega} = \frac{1}{1+\omega}$ అని చూపండి.

Solution : -

$$\text{L.H.S } \frac{1}{2+\omega} + \frac{1}{1+2\omega}$$

$$\frac{1+2\omega+2+\omega}{(2+\omega)(1+2\omega)} = \frac{3(1+\omega)}{2+4\omega+\omega+2\omega^2}$$

$$= \frac{3(1+\omega)}{2(1+\omega^2)+5\omega}$$

$$= \frac{3(-\omega^2)}{-2\omega+5\omega} \quad \because 1+\omega = -\omega^2$$

$$1+\omega^2 = \omega$$

$$= \frac{-3\omega^2}{3\omega} = -\omega$$

$$= -\frac{1}{\omega^2} = \frac{1}{1+\omega}$$

9. $1, \omega, \omega^2$ లు **1** యొక్క సంకీర్ణ ఘన మూలాలు అయితే $(2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^{10})(2-\omega^{11}) = 49$ అని చూపండి.

Solution : - $(2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^{10})(2-\omega^{11}) =$

$$\{(2-\omega)(2-\omega^2)\}\{(2-\omega)(2-\omega^2)\} \quad \{\because \omega^{10} = \omega \quad \omega^{11} = \omega^2\}$$

$$= \{4-2(\omega+\omega^2+\omega^3)\}\{4-2(\omega+\omega^2)+\omega^3\}$$

$$= (4+2+1)(4+2+1) = 49$$

sakshieducation.com

10. $1, \omega, \omega^2$ లు**1** యొక్క సంకీర్ణ ఘన మూలాలు అయితే

$(x+y+z)(x+y\omega+z\omega)\left(x+y\omega^2+2\omega\right)=x^3+y^3+z^3-3xyz$ అని చూపండి.

Solution: -

$$(x+y+z)\{x+y\omega+z\omega^2\}\{x+y\omega^2+z\omega\}$$

$$(x+y+z)\{x^2+xy\omega^2+xz\omega+xy\omega+xy\omega+y^2\omega^3+yz\omega^2+xz\omega^2+yz\omega+z^2\omega^3\}$$

$$(x+y+z)\{x^2+y^2+z^2+xy(\omega^2+\omega)+yz(\omega+\omega^2)+zx(\omega+\omega^2)\}$$

$$(x+y+z)\{x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\}$$

$$x^3+y^3+z^3-3xyz$$

11. i) **x = cisθ** అయితే $\left(x^6+\frac{1}{x^6}\right)$ విలువ కనుగొనుము

Sol: i) $x=e^{i\theta}$

$$x^6=e^{i6\theta}$$

$$\frac{1}{x^6}=e^{-6i\theta}$$

$$x^6+\frac{1}{x^6}=e^{i6\theta}+e^{-6\theta i}$$

$$=\cos 6\theta+i\sin 6\theta+\cos 6\theta-i\sin 6\theta$$

$$=2\cos 6\theta.$$

ii) **x = cisθ** అయితే **8**యొక్క ఘన మూలం కనుగొనుము

$$x=(8)^{1/3}$$

$$x^3-8=0$$

$$(x-2)(x^2+2x+4)=0$$

$$x=2, x=\frac{-2\pm\sqrt{4-16}}{2}$$

$$x = \frac{-2 \pm 2\sqrt{3}\,i}{2}$$

$$x = -1 \pm \sqrt{3}\,i$$

Roots are 2, 2ω, $2\omega^2$.

12 ఏకకపు ఘన మూలాలుω , ω^2 అయిన $z^2 - z + 1 = 0$ మూలాలు–ω , $-\omega^2$ లు అవుతాయని చూపుము.

Sol: $z^2 - z + 1 = 0$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2}$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

$$z = \frac{-[-1 \pm \sqrt{3}i]}{2}$$

$$z = -\omega, -\omega^2$$

13. $1, \omega, \omega^2$ లు**1** యొక్క సంకీర్ణ ఘన మూలాలు అయితే ఈ క్రింది వాని విలువలను కనుగొనుము

i) $(a+b)^3 + (a\omega + b\omega^2)^2 + (a\omega^2 + b\omega)^3$

Sol: **i)** $(a+b)^3 + (a\omega + b\omega^2)^2 + (a\omega^2 + b\omega)^3$

$$= a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2 + a^3\omega^3 + b^3\omega^6 + 3a^2\omega^2 \cdot b\omega^2 + 3a\omega \cdot b^2\omega^4 + a^3\omega^6 + b^3\omega^3 + 3a^2b\omega^4 \cdot \omega + 3b^2\omega^2 \cdot a\omega^2$$

$$= a^3 + b^3 + 3a^2b(1 + \omega + \omega^2) + a^3 + b^3 + 3b^2a(\omega^2 + \omega + 1) + a^3 + b^3$$

$$= 3(a^3 + b^3)$$

ii) $(a+2b)^2 + (a\omega^2 + 2b\omega)^2 + (a\omega + 2b\omega^2)^2$

sol. $(a+2b)^2 + (a\omega^2 + 2b\omega)^2 + (a\omega + 2b\omega^2)^2$

$$= a^2 + 4b^2 + 4ab + a^2\omega^4 + 4b^2\omega^2 + 4ab\omega^3 + a^2\omega^2 + 4b^2\omega^4 + 4ab\omega^3$$

$$= a^2(1 + \omega + \omega^2) + 4b^2(1 + \omega^2 + \omega) + 4ab(1 + \omega^3 + \omega^2)$$

$$= 12ab.$$

iii) $(1-\omega+\omega^2)^3$

sol. $(1-\omega+\omega^2)^3$

Now $1+\omega+\omega^2=0$

$1+\omega^2=-\omega$

$=(-\omega-\omega)^3$

$=(-2)^3\omega^3$

$=-8$

iv) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^8)$

sol.

$=(1-\omega-\omega^2+\omega^3)(1-\omega)(1-\omega^2)$

$=(1-\omega-\omega^2+\omega^3)(1-\omega-\omega^2+\omega^3)$

$=(1+1+1)(1+1+1)$

$=9$

v) $\left(\frac{a+b\omega+c\omega^2}{c+a\omega+b\omega^2}\right)+\left(\frac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2}\right)$

sol. $\left(\frac{a+b\omega+c\omega^2}{c+a\omega+b\omega^2}\right)+\left(\frac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2}\right)$

$=\frac{\omega^2(a+b\omega+c\omega^2)}{c\omega^2+a\omega^3+b\omega^4}+\frac{a\omega^2+b\omega^3+c\omega^4}{\omega^2(b+c\omega+a\omega^2)}$

$=\omega^2+\frac{1}{\omega^2}$

$=\omega^2+\frac{\omega}{\omega^3}$

$\Rightarrow \omega^2+\omega=-1$

vi) $(1-\omega)^3+(1+\omega^2)^3$

sol. $(1-\omega)^3+(1+\omega^2)^3$

$=(-\omega^2)^3+(-\omega)^3$

$=-1+(-1)$

$=-2.$

vii) $(1-\omega+\omega^2)^5+(1+\omega-\omega^2)^5$ $\left(\dfrac{a+b\omega+c\omega^2}{c+a\omega+b\omega^2}\right)+\left(\dfrac{a+b\omega+c\omega^2}{b+c\omega+a\omega^2}\right)$

$(1-\omega+\omega^2)^5+(1+\omega-\omega^2)^5$

$1+\omega^2=-\omega$

$=(-2\omega)^5+(-2\omega^2)^5$

$=(-2)^5(\omega^2+\omega)$

$=(-2)^5(-1)=32\,.$

sakshieducation.com

Short Answer Questions

1. α, β లు $x^2 - 2x + 4 = 0$ సమీకరణం యొక్క మూలాలు అయి $n \in N$ అయితే $\alpha^n + \beta^n = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$ అని చూపండి.

Solution: -

$$x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4-16}}{2} = \frac{2 \pm 2i\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha = 2\left\{\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right\} \beta = 2\left\{\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right\}$$

$$\alpha^n + \beta^n = \left\{2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^n + \left\{2\left(\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right)\right\}^n$$

$$= 2^n\left\{\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3} + \cos\frac{n\pi}{3} - i\sin\frac{n\pi}{3}\right\}$$

$$= 2^n\left\{2\cos\frac{n\pi}{3}\right\} = 2^{n+1}\cos\frac{n\pi}{3}$$

2. $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\vartheta = 0 = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\vartheta = 0$ అయితే ఈ క్రింది వానిని నిరూపించండి.

(i) $\cos 3\alpha + \cos 3\beta + \cos 3\vartheta = 3\cos(\alpha + \beta + \vartheta)$

(ii) $\sin 3\alpha + \sin 3\beta + \sin 3\vartheta = 3\sin(\alpha + \beta + \vartheta)$

(iii) $\cos(2\alpha - \beta - \vartheta) + \cos\{2\beta - \vartheta - \alpha\} + \sin(2\vartheta - \alpha - \beta) = 3$

(iv) $\sin(2\alpha - \beta - \vartheta) + \sin(2\beta - \vartheta - \alpha) + \sin(2\vartheta - \alpha - \beta) = 0$

(v) $\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\vartheta = 0$

(vi) $\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\vartheta = 0$

(vii) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\vartheta = 0$

(viii) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\vartheta = 3/2$

(ix) $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\beta + \vartheta) + \cos(\vartheta + \alpha) = 0$

(x) $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta + \vartheta) + \sin(\vartheta + \alpha) = 0$

Solution : -

Let $x=\cos\alpha+i\sin\alpha \quad y=\cos\beta+i\sin\beta : z=\cos\vartheta+i\sin\vartheta$

$x+y+z=(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\vartheta)+i(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\vartheta)$

$x+y+z=0 \Rightarrow x^3+y^3+z^3=3xyz$

Proof of (i) & (ii)

$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^3+(\cos\beta+i\sin\beta)^3+(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)^3=3cis\alpha\, cis\beta\, cis\vartheta$

$cis3\alpha+cis3\beta+cis3\vartheta=3cis(\alpha+\beta+\vartheta)$

$(\cos3\alpha+i\sin3\alpha)+(\cos3\beta+i\sin3\beta)+(\cos3\vartheta+i\sin3\vartheta)=3\cos(\alpha+\beta+\vartheta)+3i\sin(\alpha+\beta+\vartheta)$

By comparing real and imaginary parts on both sides

$\cos3\alpha+\cos3\beta+\cos3\vartheta \;+3\cos(\alpha+\beta+\vartheta)$

$\sin3\alpha+\sin3\beta+\sin3\vartheta=3\sin(\alpha+\beta+\vartheta)$

Proof of (iii) & (iv)

We know that $\sin3\alpha+\sin3\beta+\sin3\vartheta=3\sin(\alpha+\beta+\vartheta)$

$\frac{x^3+y^3+z^3}{xyz}=3\Rightarrow \frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=3$

$\frac{cis2\alpha}{cis\beta cis\vartheta}+\frac{cis2\beta}{cis\vartheta.\, cis\alpha}+\frac{cis2\vartheta}{cis\alpha\, cis\beta}=3$

$cis(2\alpha-\beta-\vartheta)+cis(2\beta-\vartheta-\alpha)+\cos(2\vartheta-\alpha-\beta)=3$

$\{\cos(2\alpha-\beta-\vartheta)+i\sin(2\alpha-\beta-\vartheta)\}+\cos(2\beta-\vartheta-\alpha)+1\sin(2\beta-\vartheta-\alpha)$

$+\cos(2\vartheta-\alpha-\beta)+1\sin(2\vartheta-\alpha-\beta)=3$

Comparing real and imaginary parts on both sides

$\cos(2\alpha-\beta-\vartheta)+\cos(2\beta-\vartheta-\alpha)+\cos(2\vartheta-\alpha-\beta)=3$

$\sin(2\alpha-\beta-\vartheta)+\sin(2\beta-\vartheta-\alpha)+\sin(2\vartheta-\alpha-\beta)=0$

sakshieducation.com

Proof of V & VI

We know that $x+y+z=0$

$$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{\cos\alpha+1\sin\alpha}+\frac{1}{\cos\beta+i\sin\beta}+\frac{1}{\cos\vartheta+i\sin\vartheta}$$

$$=\cos\alpha-i\sin\alpha+\cos\beta-i\sin\beta+\cos\vartheta-i\sin\vartheta$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$$

$$x+y+z=0\Rightarrow(x+y+z)^2=0\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2xy+2y+2zx=0$$

$$x^2+y^2+z^2+2xyz\left\{\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right\}=0$$

$$(cis\alpha)^2+(cis\beta)^2+(cis\vartheta)^2+2(cis\alpha\, cis\beta\, cis\vartheta)(0)$$

$$\left\{\because \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0\right\}$$

$$cis2\alpha+cis2\beta+cis2\vartheta=0\Rightarrow(\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\vartheta)+i(\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\vartheta)=0$$

వాస్తవ మరియు సంకీర్ణ భాగాలను పోల్చగ

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\vartheta=0$$

$$\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\vartheta=0$$

Proof of (vii)

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\vartheta=0$$

$$2\cos^2\alpha+2\cos^2\beta-1+2\cos^2\vartheta-1=0$$

$$2\{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\vartheta\}=3$$

$$\therefore \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\vartheta=\frac{3}{2}$$

Proof viii

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\vartheta=0$$

$$1-2\sin^2\alpha+1-2\sin^2\beta+1-2\sin^2\vartheta=0$$

$$3=2\{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\vartheta\}$$

$$\Rightarrow \sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\vartheta=\frac{3}{2}$$

Proof of (ix) and (x)

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$$

$$\therefore yz+zx+xy=0$$

$$\therefore cis\alpha\, cis\beta + cis\beta\, cis\vartheta + cis\vartheta\, cis\alpha = 0$$

$$= cis(\alpha+\beta)+\cos(\beta+\vartheta)+cis(\vartheta+\alpha)=0$$

$$\{\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)\}+\{\cos(\beta+\vartheta)\}+\{\cos(\vartheta+\alpha)+i\sin(\vartheta+\alpha)\}=0$$

వాస్తవ మరియు సంకీర్ణ భాగాలను పొల్చగ

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\beta+\vartheta)+\cos(\vartheta+\alpha)=0$$

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\beta+\vartheta)+\sin(\vartheta+\alpha)=0$$

3. **n పూర్ణాంకం అయి $z = cis\theta$ అయితే $\frac{z^{2n}-1}{z^{2n}+1} = i\tan n\theta$ అని చూపండి.**

Solution : -

$$\frac{z^{2n}-1}{z^{2n}+1}=\frac{(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n}-1}{(\cos\theta+i\sin\theta)^{2n}+1}$$

$$=\frac{\cos 2n\theta+i\sin 2n\theta-1}{\cos 2n\theta+i\sin 2n\theta+1}$$

$$=\frac{-(1-\cos 2n\theta)+i\sin 2n\theta}{(1+\cos 2n\theta)+i\sin 2n\theta}$$

$$=\frac{i^2\left(2\sin^2 n\theta\right)+2i\sin n\theta\cos n\theta}{2\cos^2 n\theta+2i\sin n\theta\cos n\theta}\left\{\because -1=i^2\right\}$$

$$=\frac{\cancel{2}i\sin n\theta\,\{\cancel{\cos n\theta+i\sin n\theta}\}}{\cancel{2}\cos n\theta\{\cancel{\cos n\theta}+i\sin n\theta\}}=i\tan n\theta$$

sakshieducation.com

4. $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ అయితే

i) $a_0 - a_2 + a_4 - a_6 + ... = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$

ii) $a_1 - a_3 + a_5 - a_7 + ... = 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}$. అని చూపండి.

Sol: $(1+x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$

Put x = i

$(1+i)^n = a_0 + a_1i + a_2i^2 + ... + a_ni^n$

$$\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^n = (a_0 - a_2 + a_4...) + i(a_1 - a_3 + a_5...)$$

$$2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) = (a_0 - a_2 + a_4...) + i(a_1 - a_3 + a_5...)$$

వాస్తవ భాగాలను పోల్చగ

$$a_0 - a_2 + a_4... = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}$$

సంకీర్ణ భాగాలను పోల్చగ

$$a_1 - a_3 + a_5... = 2^{n/2}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

5. **(i)** $x^4 - 1 = 0$ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Solution : -

(i) $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1$

$$\therefore x = (1)^{\frac{1}{4}} = (\cos 0 + i\sin 0)^{\frac{1}{4}}$$

$$= \left\{\cos\frac{2k\pi}{4} + \frac{i\sin 2k\pi}{4}\right\} k = 0, 1, 2, 3$$

$$= \cos 0 + 1\sin 0 \quad cis\frac{\pi}{2} \quad cis\pi \; cis\frac{3\pi}{2}$$

= 1, I, -1, -i

$= \pm 1, \pm i$

(ii) $x^5+1=0$ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Solution : -

$$x^5+1=0 \Rightarrow (\cos\pi + i\sin\pi)^{\frac{1}{5}}$$

$$x=\cos\left(\frac{2k\pi+\pi}{5}\right) k=0,1,2,3,4$$

$$\therefore x = cis\frac{\pi}{5}, cis\frac{3\pi}{5} cis\pi, cis\frac{7\pi}{5}, \cos\frac{9\pi}{5}$$

(iii) $x^9-x^5+x^4-1=0$ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Solution : -

$$x^9-x^5+x^4-1=0$$

$$x^5\left(x^4-1\right)+1\left(x^4-1\right)=0$$

$$\left(x^4-1\right)=0:\left(x^5+1\right)=0$$

Do (i) , (ii) to get the solution of (iii)

(iv) $x^4+1=0$ సమీకరణాన్ని సాధించండి.

Solution : -

$$x^4+1=0 \Rightarrow x=(-1)^{\frac{1}{4}}=(cis\pi)^{\frac{1}{4}}$$

$$x=cis\left(\frac{2k\pi+\pi}{4}\right) k=0,1,2,3$$

$$x=cis\frac{\pi}{4}, cis\frac{3\pi}{4} cis\frac{5\pi}{4} cis\frac{7\pi}{4}$$

sakshieducation.com

6. **n పూర్ణాంకం అయితే** $(p+iq)^{\frac{1}{n}}+(p-iq)^{\frac{1}{n}}=2(p^2+q^2)^{\frac{1}{2n}}\cos\left\{\frac{1}{n}arc.\tan\frac{q}{p}\right\}$ **అని చూపండి.**

Solution : -

Let $p+iq=r\{\cos\theta+i\sin\theta\}$

$r\cos\theta=p \quad r\sin\theta=q \quad \Rightarrow r^2=p^2+q^2$

$\therefore r=\sqrt{p^2+q^2}$

$\cos\theta=\dfrac{p}{\sqrt{p^2+q^2}}\ \sin\theta=\dfrac{q}{\sqrt{p^2+q^2}}$

$\tan\theta=\dfrac{q}{p} \ \Rightarrow \theta=\tan^{-1}\left(\dfrac{p}{q}\right)$

$(p+iq)^{\frac{1}{n}}+(p-q)^{\frac{1}{n}}=\{r(\cos\theta+i\sin\theta)\}^{\frac{1}{n}}+\{r(\cos\theta-i\sin\theta)\}^{\frac{1}{n}}$

$=r^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\frac{\theta}{n}+i\sin\frac{\theta}{n}+\cos\frac{\theta}{n}-i\sin\frac{\theta}{n}\right\}$

$=\left(\sqrt{p^2+q}^{\,2}\right)^{\frac{1}{n}}\left\{2\cos\frac{1}{n}\theta\right\}$

$=2(p^2+q^2)^{\frac{1}{2n}}\cos\left(\frac{1}{n}\tan^{-1}\frac{q}{p}\right)$

7. $\left\{\dfrac{1+\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}}\right\}^{8/3}=-1$ **అని చూపండి.**

Solution : -

$$\text{LHS }=\left\{\frac{1+\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}}{1+\sin\frac{\pi}{8}-i\cos\frac{\pi}{8}}\right\}^{8/3}$$

$$\left\{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi/8\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi/8\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\pi/8\right)-1\sin\left(\frac{\pi}{2}-\pi/3\right)}\right\}^{8/3}$$

$$\left\{\frac{1+\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}}{1+\cos\frac{3\pi}{8}-i\sin\frac{3\pi}{8}}\right\}^{8/3}=\left\{\frac{2\cos^2\frac{3\pi}{16}+2i\sin\frac{3\pi}{16}\cos\frac{3\pi}{16}}{2\cos^2\frac{3\pi}{16}-2i\sin\frac{3\pi}{16}\cos\frac{3\pi}{16}}\right\}^{8/3}$$

$$\left[\frac{2\cos\frac{3\pi}{16}\left\{\cos\frac{3\pi}{16}+1\sin\frac{3\pi}{16}\right\}}{2\cos\frac{3\pi}{16}\left(\cos\frac{3\pi}{16}-i\sin\frac{3\pi}{16}\right)}\right]^{\frac{8}{3}}$$

$$\left[\frac{\left(\cos\frac{3\pi}{16}+i\sin\frac{3\pi}{16}\right)\left(\cos\frac{3\pi}{16}+i\sin\frac{3\pi}{16}\right)}{\left(\cos\frac{3\pi}{16}-i\sin\frac{3\pi}{16}\right)\left(\cos\left(\frac{3\pi}{16}+i\sin\frac{3\pi}{16}\right)\right)}\right]^{8/3}$$

$$\left[\frac{\left(\cos\frac{3\pi}{16}+i\sin\frac{3\pi}{16}\right)^2}{\cos^2\frac{3\pi}{16}+\sin^2\frac{3\pi}{16}}\right]^{8/3}$$

$$\left(\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}\right)^{8/3}$$

$$\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

8. **$x^{12}-1=0$, $x^4+x^2+1=0$** ల ఉమ్మడి మూలములను కనుక్కోండి

Sol: $x^{12}-1=0$

$x=(1)^{1/12}$

$x=\left[\cos(2n\pi)+i\sin(2n\pi)\right]^{1/12}$

$n=0,1,2,\ldots 11 \quad \ldots(1)$

$x^4+x^2+1=0$

$(x^2-1)(x^4+x^2+1)=0$

$x^6-1=0$

$x=(1)^{1/6}$

$x=\left[\cos(2n\pi)+i\sin(2n\pi)\right]^{1/6}$

$=\cos\frac{2n\pi}{6}+i\sin\frac{2n\pi}{6},\ n=0,1,2,3,4,5\ldots(2)$

Common roots to (1) and (2)

$\text{cis}\frac{\pi}{3}, \text{cis}\frac{2\pi}{3}, \text{cis}\frac{4\pi}{3}, \text{cis}\frac{5\pi}{3}.$

9. ఏక కపు 15 వ మూలాలు, ఏక కపు 25 వ మూలాలలో ఉమ్మడి మూలాల సంఖ్యను కనుక్కోండి

Sol: $x = (1)^{1/15}$

$x = [\cos 2n\pi + i\sin 2n\pi]^{1/15}$

$x = \cos\frac{2n\pi}{15} + i\sin\frac{2n\pi}{15}$

$n = 0, 1, 2, 3, \ldots 14$

$n = 3, m = 5$

$x = \cos\frac{2\pi}{25} + i\sin\frac{2\pi}{25}$

$n = 9, m = 15$

$\cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$

$x = (1)^{1/25}$

$x = [\cos 2m\pi + i\sin 2m\pi]^{1/25}$

$x = \cos\frac{2m\pi}{25} + i\sin\frac{2m\pi}{25}$

$m = 0, 1, 2, 3, \ldots 24$

$n = 6, m = 10$

$x = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$

$n = 12, m = 20$

$\cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$

$n = 0,\ m = 0$

5 roots common.

6. $1, \omega, \omega^2$ లు**1** యొక్క సంకీర్ణ ఘన మూలాలు అయితే **$(x-1)^3 + 8 = 0$.** యొక్క మూలాలు కనుగొనుము.

Sol: $(x-1)^3 = -8$

$$(x-1) = (-8)^3$$
$$x-1 = -2 \Rightarrow x = -1$$
$$x-1 = -2\omega \Rightarrow x = -2\omega + 1$$
$$x-1 = -2\omega^2 \Rightarrow x = -2\omega^2 + 1$$

5. **$(1 + i)^{4/5}$.** యొక్క అన్ని మూలాల లబ్దాన్ని కనుగొనుము

Sol: $(1 + i)^{4/5}$

$$= (\sqrt{2})^{4/5}\left[\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right]^{4/5}$$

$$= (2)^{2/5}\left[\cos\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right]^{4/5}$$

$$n = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$= (2)^{2/5}\left[\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{5} + i\sin\frac{\pi}{4}\cdot\frac{4}{5}\right] \quad ...(1)$$

$$= (2)^{2/5}\left[\cos\frac{9\pi}{4}\cdot\frac{4}{5} + i\sin\frac{9\pi}{4}\cdot\frac{4}{5}\right] \quad ...(2)$$

$$\text{Product} = (2^{2/5})^5 e^{i\left[\frac{\pi}{5}(1+9+17+25+33)\right]}$$

$$= 2^2 e^{i\frac{\pi}{5}(85)}$$

$$= 2^2[\cos 17\pi + i\sin 17\pi]$$

$$= -4$$

10 **z సంకీర్ణ సంఖ్య అయి $z^2 + z + 1 = 0$ అయితే**

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^2+\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)^2+\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)^2+\left(z^4+\frac{1}{z^4}\right)^2+\left(z^5+\frac{1}{z^5}\right)^2+\left(z^6+\frac{1}{z^6}\right)^2=12$$ **అని చూపండి.**

Sol: **let** $z = \omega$

L.H.S. =

$$\left(\omega+\frac{1}{\omega}\right)^2+\left(\omega^2+\frac{1}{\omega^2}\right)^2+\left(\omega^3+\frac{1}{\omega^3}\right)^2+$$

$$\left(\omega^4+\frac{1}{\omega^4}\right)^2+\left(\omega^5+\frac{1}{\omega^5}\right)^2+\left(\omega^6+\frac{1}{\omega^6}\right)^2$$

$$=(-1)^2+(-1)^2+(2)^2+(-1)^2+(-1)^2+(2)^2$$

$$=12$$

sakshieducation.com

Long Answer Questions

1. ఏక కపు **n** వ మూలాలు $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \ldots \alpha^{n-1}$ అయితే

$$1^p + \alpha^p + (\alpha^2)^p + (\alpha^3)^p + \ldots + (\alpha^{n-1})^p = \begin{cases} 0 \text{ if } p \neq kn \\ n \text{ if } p = kn \end{cases}$$ అని చూపండి **(p, k ∈ N.)**

Sol: $x^n - 1 = 0 \Rightarrow x = (1)^{1/n}$

$x = [\cos 2n\pi + i \sin 2n\pi]^{1/n}$

$x = \cos\frac{2m\pi}{n} + i \sin\frac{2m\pi}{n}$

$\alpha = \cos\frac{2m\pi}{n} + i \sin\frac{2m\pi}{n}$

$\alpha^p = \cos\frac{2mp\pi}{n} + i \sin\frac{2mp\pi}{n}$

Now p = kn

1 + 1 + 1 + … n terms = n

If p ≠kn value

$1^p + \alpha^p + (\alpha^2)^p + (\alpha^3)^p + \ldots + (\alpha^{n-1})^p = 0$.

2. **$x^7 - 1 = 0$** మూలాల యొక్క **99**వఘాతాల మొత్తం శూన్యం అనిచూపండి. దీను=ఇ నుంచి **deduce the roots of** $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. యొక్క మూలాలను రాబట్టండి.

Sol: $x^7 - 1 = 0 \Rightarrow x = (1)^{1/7}$

$x = (\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi)^{1/7}$

$x = \cos\frac{2k\pi}{7} + i \sin\frac{2k\pi}{7}$

$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$x_1 = 1, x_2 = e^{\frac{2\pi}{7}i}, x_3 = e^{\frac{4\pi}{7}i}, \ldots, x_6 = e^{\frac{12\pi}{7}i}$

$x_1^{99} + x_2^{99} + x_3^{99} + \ldots$

$$1^{99}+e^{\frac{2\pi}{7}\cdot 99i}+e^{\frac{4\pi}{7}\cdot 99i}+\ldots e^{\frac{12\pi}{7}\cdot 99i}=0$$

$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$ యొక్క మూలాలు $\cos\frac{2k\pi}{7}+i\sin\frac{2k\pi}{7}$; k = 1, 2, 3, 4, 5, 6.

$\because (x^7)-1=$

$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$

$x=1$ ఒక మూలం

$\Rightarrow \text{cis}\frac{2k\pi}{7}$; k = 1, 2, 3, 4, 5, 6 లు

$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=0$.యొక్క మూలాలు.

5. **n ధన పూర్ణాంకం అయితే$(x-1)^n = x^n$ సాధించండి**

Sol: $\left(\frac{x-1}{x}\right)^n=1$

$$\frac{x-1}{x}=(1)^{1/n}$$

$$\frac{x-1}{x}=[\cos 2m\pi+i\sin 2m\pi]^{1/n}$$

$$\frac{x-1}{x}=\cos\frac{2m\pi}{n}+i\sin\frac{2m\pi}{n}$$

$$1-\frac{1}{x}=e^{i\frac{2m}{n}\pi}$$

$$1-\cos\frac{2m\pi}{n}-i\sin\frac{2m\pi}{n}=\frac{1}{x}$$

$$2\sin^2\frac{m\pi}{n}-2i\sin\frac{m\pi}{n}\cos\frac{m\pi}{n}=\frac{1}{x}$$

$$2\sin\frac{m\pi}{n}\left[\sin\frac{m\pi}{n}-i\cos\frac{m\pi}{n}\right]=\frac{1}{x}$$

sakshieducation.com

$$x = \frac{1}{2\sin\frac{m\pi}{n}\left[\sin\frac{m\pi}{n} - i\cos\frac{m\pi}{n}\right]}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{m\pi}{n}\left[\sin\frac{m\pi}{n} - i\cos\frac{m\pi}{n}\right]} X \frac{\left[\sin\frac{m\pi}{n} + i\cos\frac{m\pi}{n}\right]}{\left[\sin\frac{m\pi}{n} + i\cos\frac{m\pi}{n}\right]}$$

$$= \frac{\left[\sin\frac{m\pi}{n} + i\cos\frac{m\pi}{n}\right]}{2\sin\frac{m\pi}{n}\left[\sin^2\frac{m\pi}{n} + \cos^2\frac{m\pi}{n}\right]}$$

$$= \frac{\left[\sin\frac{m\pi}{n} + i\cos\frac{m\pi}{n}\right]}{2\sin\frac{m\pi}{n}}$$

$$\frac{1}{2}\left[1 + i\cot\frac{m\pi}{n}\right]; m = 1, 2, 3, \ldots(n-1)$$

2. **m, n లు పూర్ణాంకాలు మరియు $x = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $y = \cos\beta + i\sin\beta$ అయితే**

$$x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = \cos(m\alpha + n\beta) \textbf{ and } x^m y^n - \frac{1}{x^m y^n} = 2i\sin(m\alpha + n\beta)$$ **అని చూపండి.**

Sol. $x^m = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^m$

$= \cos m\alpha + i\sin m\alpha$

$y^n = (\cos\beta + i\sin\beta)^n$

$= \cos n\beta + i\sin n\beta$

$\therefore x^m y^n = (\cos m\alpha + i\sin m\alpha)(\cos n\beta + i\sin n\beta)$

$= \cos(m\alpha + n\beta) + i\sin(m\alpha + n\beta)$ ... (1)

$$\frac{1}{x^m y^n} = \frac{1}{\cos(m\alpha + n\beta) + i\sin(m\alpha + n\beta)}$$

$= \cos(m\alpha + n\beta) - i\sin(m\alpha + n\beta)$ ...(2)

By adding (1) and (2), we get

$$x^m y^n + \frac{1}{x^m y^n} = \cos(m\alpha + n\beta)$$

By subtracting (2) from (1), we get

$$x^m y^n - \frac{1}{x^m y^n} = 2i\sin(m\alpha + n\beta)$$

3. n ధన పూర్ణాంకం అయితే $(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{\frac{n+2}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ అని చూపండి.

Sol.

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1-i) \quad = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$(1+i)^n \quad = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$$= 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \qquad ...(1)$$

$$(1-i)^n \quad = \left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$$= 2^{n/2}\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right) \qquad ...(2)$$

By adding (1) and (2), we get

$$(1+i)^n + (1-i)^n = 2^{n/2}\left(2\cos\frac{n\pi}{4}\right) = 2^{\frac{n+2}{2}}\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

sakshieducation.com

4. **n** ధన పూర్ణాంకం అయితే $(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n=2^{n+1}\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)$ అని చూపండి.

Sol.L.H.S. =

$$(1+\cos\theta+i\sin\theta)^n+(1+\cos\theta-i\sin\theta)^n=$$

$$=\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}+2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^n+\left(2\cos^2\frac{\theta}{2}-2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^n$$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left[\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n+\left(\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)^n\right]$$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}+\cos\frac{n\theta}{2}-i\sin\frac{n\theta}{2}\right)$$

$$=2^n\cos^n\frac{\theta}{2}\left(2\cos\frac{n\theta}{2}\right)$$

$$=2^{n+1}\cos^n\frac{\theta}{2}\cos\frac{n\theta}{2}=\text{R.H.S.}$$

5. **$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$ n** అయితే

$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{3}{2}=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma$ అని చూపండి.

Sol. $(\cos\alpha+i\sin\alpha)+(\cos\beta+i\sin\beta)+(\cos\gamma+i\sin\gamma)$

$$=(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)+i(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)=0+i0$$

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)+(\cos\beta+i\sin\beta)+(\cos\gamma+i\sin\gamma)=0\ \ldots(1)$$

Let $x=\text{cis}\alpha, y=\text{cis}\beta, z=\text{cis}\gamma$ then

$x+y+z=0$ by (1), then

$x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+zx)$

$$=-2xyz\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$$

$$=-2xyz[\cos\alpha-i\sin\alpha+\cos\beta-i\sin\beta+\cos\gamma-i\sin\gamma]$$

$$=-2xyz[(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)-i(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)]$$

$= -2xyz(0 - i0) = 0$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = 0$

$\Rightarrow (\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 + (\cos\beta + i\sin\beta)^2 + (\cos\gamma + i\sin\gamma)^2 = 0$

$\Rightarrow \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha + \cos 2\beta + i\sin 2\beta + \cos 2\gamma + i\sin 2\gamma = 0$

$\Rightarrow (\cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma) + i(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma) = 0$

$\therefore \cos 2\alpha + \cos 2\beta + \cos 2\gamma = 0$

$2\cos^2\alpha - 1 + 2\cos^2\beta - 1 + 2\cos^2\gamma - 1 = 0$

$2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) = 3$

$\therefore \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{3}{2}$

$1 - \sin^2\alpha + 1 - \sin^2\beta + 1 - \sin^2\gamma = \frac{3}{2}$

$\therefore \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{3}{2}$.

6. $(\sqrt{3} + i)^{1/4}$ యొక్క అన్ని విలువలను కనుగొనుము

Sol. $\sqrt{3} + i$ యొక్క మాప ఆయామ రూపం

$$\sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right) = 2(\cos 30° + i\sin 30°)$$

$$(\sqrt{3} + i)^{1/4} = \left(2\text{cis}\frac{\pi}{6}\right)^{1/4}$$

$$= 2^{1/4}\left(\text{cis}\frac{2k\pi + \frac{\pi}{6}}{4}\right), k = 0, 1, 2, 3$$

$$= 2^{1/4}\text{cis}\left(\frac{12k\pi + \pi}{24}\right), k = 0, 1, 2, 3$$

$$= 2^{1/4}\text{cis}(12k + 1)\frac{\pi}{24}, \ k = 0, 1, 2, 3$$

$\therefore$ $\sqrt{3} + i$ యొక్క అన్ని విలువలు

$$2^{1/4}\text{cis}\frac{\pi}{24}, 2^{1/4}\text{cis}\frac{13\pi}{24}, 2^{1/4}\text{cis}\frac{25\pi}{24}, 2^{1/4}\text{cis}\frac{37\pi}{24}$$

7. $1, \omega, \omega^2$ **లు1 యొక్క సంకీర్ణ ఘన మూలాలు అయితే క్రిందివానిని నిరూపించండి.**

i) $(1-\omega+\omega^2)^6+(1-\omega^2+\omega)^6=128$ $\quad =(1-\omega+\omega^2)^7+(1+\omega-\omega^2)^7$

Sol: $1+\omega+\omega^2 = 1+\frac{(-1+i\sqrt{3})}{2}+\frac{(-1-i\sqrt{3})}{2}=0$ **and** $\omega^3=\left(\text{cis}\frac{2\pi}{3}\right)^3=\text{cis}2\pi=1$

i) $(1-\omega+\omega^2)^6+(1-\omega^2+\omega)^6$

$=(-\omega-\omega)^6+(-\omega^2-\omega^2)^6$

$=2^6(\omega^6+\omega^{12})=2^6(2)=128$

$(1-\omega+\omega^2)^7+(1+\omega-\omega^2)^7$

$=(-\omega-\omega)^7+(-\omega^2-\omega^2)^7$

$=(-2)^7(\omega^7+\omega^{14})$

$=(-2)^7(\theta+\theta^2)$

$=(-128)(-1)=128.$

ii) $(a+b)(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)=a^3+b^3$**.**

$(a+b)(a\omega+b\omega^2)(a\omega^2+b\omega)$

$=(a+b)(a^2\omega^3+ab\omega^4+ab\omega^2+b^2\omega^3)$

$=(a+b)\left(a^2+ab(\omega+\omega^2)+b^2\right)$

$=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$=a^3+b^3$

iii) $\mathbf{x^2+4x+7=0}$ **,** $\mathbf{x=\omega-\omega^2-2}$**.**

$x=\omega-\omega^2-2$

$(x+2)=\omega-\omega^2$

$\Rightarrow (x+2)^2=\omega^2+\omega^4-2\omega^3$

$\Rightarrow x^2+4x+4=\omega^2+\omega-2=-1-2=-3$

$\Rightarrow x^2+4x+7=0.$

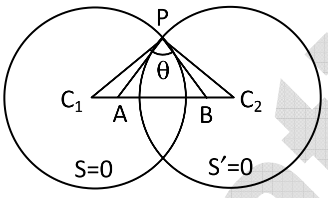
వృత్త సరణులు - I

Theorem: r_1, r_2 లు వ్యాసార్ధాలు గాగల వృత్త కేంద్రాల మధ్య దూరం d మరియు వాటి మధ్య కోణం θ అయితే $\cos\theta = \dfrac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$ అనిచూపుము.

Proof: $S = 0, S' = 0$ లను దత్త వృత్తాలు అనుకొనుము.

C_1, C_2 లు వృత్త కేంద్రాలు r_1, r_2 లు వ్యాసార్ధాలు అనుకొనుము. అప్పుడు $C_1C_2 = d$.

ఖండాన బిందువు P అనుకొనుము



$PC_1 = r_1, PC_2 = r_2, \angle APB = \theta$

$S = 0$ కు PB స్పర్శ రేఖ కావున , $\angle C_1PB = \pi/2$

$S' = 0$ కు PA స్పర్శ రేఖ కావున , $\angle C_2PA = \pi/2$

$\angle C_1PC_2 = \angle C_1PB + \angle C_2PA - \angle APB = \pi/2 + \pi/2 - \theta = \pi - \theta$

ΔC_1PC_2, కు కొసైన్ సూత్రం వ్రాయగ

$$C_1^2C_2^2 = PC_1^2 + PC_2^2 - 2PC_1 \cdot PC_2 \cos\angle C_1PC_2 \Rightarrow d^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos(\pi - \theta) \Rightarrow d^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\theta$$

$$\Rightarrow 2r_1r_2\cos\theta = d^2 - r_1^2 - r_2^2 \Rightarrow \cos\theta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2}$$

Corollary:

$\mathbf{x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0}$, $\mathbf{x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0}$ వృత్తాల మధ్య θ కోణం అయితే

$\cos\theta = \dfrac{c + c' - 2(gg' + ff')}{2\sqrt{g^2 + f^2 - c}\sqrt{g'^2 + f'^2 - c'}}$ అని చూపుము.

Proof: C_1, C_2 లు వృత్త కేంద్రాలు, r_1, r_2 లు వ్యాసార్ధాలు $C_1C_2 = d$ అనుకొనుము.

$\therefore\ C_1 = (-g, -f), C_2 = (-g', -f'),$

$r_1 = \sqrt{g^2 + f^2 - c},\ r_2 = \sqrt{g'^2 + f'^2 - c'}$

$$\cos\theta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = \frac{(g-g')^2 + (f-f')^2 - (g^2+f^2-c) - (g'^2+f'^2-c')}{2\sqrt{g^2+f^2-c}\sqrt{g'^2+f'^2-c'}}$$

$$= \frac{g^2 + g'^2 - 2gg' + f^2 + f'^2 - 2ff' - g^2 - f^2 + c - g'^2 - f'^2 + c'}{2\sqrt{g^2+f^2-c}\sqrt{g'^2+f'^2-c'}}$$

$$= \frac{c + c' - 2(gg' + ff')}{2\sqrt{g^2+f^2-c}\sqrt{g'^2+f'^2-c'}}.$$

$S \equiv x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0,\ S' \equiv x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y + c' = 0$ వృత్తాలు లంబంగా ఖండించుకుంటే $2gg' + 2ff' = c + c'$.

Very Short Answer Questions

1. $x^2+y^2 + 2by-k = 0,\ x^2+y^2+2ax+8=0$ వృత్తాలు లంబంగా ఖండించు కుంటే 'k' విలువ కనుగొనుము

$x^2+y^2 + 2by-k = 0,\ x^2+y^2+2ax+8=0$

Sol. వృత్తాలు : $x^2+y^2 + 2by-k = 0,\ x^2+y^2+2ax+8=0$

$g_1 = 0;\quad f_1 = b;\ c_1 = -k$

$g_2 = a;\quad f_1 = 0;\ c_1 = 8$

వృత్తాలు లంబంగా ఖండించుకుంటున్నా యి కావున

$2g_1g_2 + 2f_1 f_2 = c_1 + c_2$

$2(0)(a) + 2(b)(0) = -k + 8$

$0 = -k + 8$

$K = 8$

2. $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 41 = 0;\quad x^2 + y^2 - 4x + 6y - 59 = 0$ వృత్తాల మధ్య కోణం కనుగొనుము.

Sol. $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 41 = 0$

$C_1 = (6, 3),\ r_1 = \{36 + 9 - 41\}^{1/2} = 2$

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 59 = 0,\ C_2 = (-2,-3)$

$r_2 = \{4 + 9 - 59\}^{1/2} = \{72\}^{1/2} = 6\sqrt{2}$

$C_1C_2 = d = \sqrt{(6+2)^2+(3+3)^2} = \sqrt{64+36} = 10$

వృత్తాల మధ్య θ కోణం అయితే $\cos\theta = \frac{d^2 - r_1^2 - r_2^2}{2r_1r_2} = \frac{100-4-72}{2 \times 2\sqrt{72}} = \frac{24}{4 \times 6\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\theta = 45^o$

4. $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 12 = 0$; $x^2 + y^2 - 4x + 6y + k = 0$ వృత్తాలు లంబంగా ఖండించుకుంటున్నాయని చూపుము.

Sol. వృత్తాలు :$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 12 = 0$; $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 24 = 0$

$g = 3$, $f = -4$, $c = -12$, $g^1 = -2$, $f^1 = 3$; $c^1 = 0$.

$c + c^1 = -12 - 24 = -36$.

$2gg^1 + 2ff^1 = 2.3.(-2)+2.(-4)3 = -12 - 24 = -36$

$2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$

వృత్తాలు లంబంగా ఖండించుకుంటున్నాయి.

5. $x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$, $3(x^2 + y^2) - 7x + 8y + 11 = 0$

వృత్తాల మూల అక్షం కనుగొనుము

Sol. $S \equiv x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5 = 0$

$$S' = x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x + \frac{8}{3}y + \frac{11}{3} = 0$$

మూల అక్షం $S - S' = 0$

$$(x^2 + y^2 - 3x - 4y + 5) - \left(x^2 + y^2 - \frac{7}{3}x + \frac{8}{3}y + \frac{11}{3}\right) = 0$$

$$-\frac{2}{3}x - \frac{20}{3}y + \frac{4}{3} = 0 \Rightarrow x + 10y - 2 = 0$$

6. $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$, $x^2 + y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$ వృత్తాల ఉమ్మడి జ్యా ను కనుగొనుము

Sol. $S = x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3 = 0$

$S^1 = x^2 + y^2 - 5x - 6y + 4 = 0$

ఉమ్మడి జ్యా: $S - S' = 0$

$(x^2 + y^2 - 4x - 4y + 3) - (x^2 + y^2 - 5x - 6y + 4) = 0 \Rightarrow \quad x + 2y - 1 = 0$

Short Answer Questions

1. మూల బిందువు గుండా పోతూ $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0$, $x^2 + y^2 + 12y + 6 = 0$ వృత్తాలను లంబంగా ఖండించే వృత్తాన్ని కనుగొనుము

Sol. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ----(1) ను కావల్సిన వృత్తం అనుకొనుము.

పై వృత్తం మూల బిందువు గుండా పోతోంది.

$0+0+0+0+c = 0 \therefore c=0.$

$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 10 = 0$, $x^2 + y^2 + 12y + 6 = 0$ వృత్తాలను $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ లంబంగా ఖండిస్తోంది కనుక

$2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$

$2g(-2) + 2f(3) = 0 + 10$

$-4g + 6f = 10$ ------ (2)

$\therefore 2g(0) + 2f(6) = 6 + 0$

$12f = 6$------ (3) $\Rightarrow f = \frac{1}{2}$

(2), (3) లనుండి

$-4g + 6\ \frac{1}{2} = 10$

$-4g = 10 - 3 \Rightarrow g = -\frac{7}{4}$

$\therefore$ వృత్త సమీకరణం

$x^2 + y^2 - \frac{7}{2}x + y = 0 \Rightarrow 2x^2 + 2y^2 - 7x + 2y = 0.$

2. (0, -3) బిందువు గుండా పోతూ **$x^2 + y^2 - 6x + 3y + 5 = 0$, $x^{2+} + y^2 - x - 7y = 0$** వృత్తాలను లంబంగా ఖండించే వృత్తాన్ని కనుగొనుము

Sol. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ----(1) ను కావల్సిన వృత్తం అనుకొనుము.

$x^2 + y^2 - 6x + 3y + 5 = 0$, $x^{2+} + y^2 - x - 7y = 0$ వృత్తాలను $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ లంబంగా ఖండిస్తోంది కనుక

$\therefore 2g(-3) + 2f\left(\frac{+3}{2}\right) = c + 5$

$-6g + 3f = c + 5$----------- (2)

$\therefore\ 2g\left(\frac{+1}{2}\right) + 2f\left(\frac{+7}{2}\right) = c$

$-g - 7f = c$ ----(3)

(1) **(0, -3)** బిందువు గుండా పోతోంది

$0 + 9 - 6f + c = 0$

(3) – (2)

$5g - 10f = -5 \Rightarrow g - 2f = -1$

(iii) + (iv)

$9 - g - 13f = 0 \Rightarrow g + 13f = 9$

$\underline{g - 2f = -1}$

$15f = 10$

$f = \frac{2}{3} \Rightarrow g = 2.\frac{2}{3} - 1 \Rightarrow g = +\frac{1}{3}$

$\Rightarrow 9 - 6.\frac{2}{3} + c = 0 \Rightarrow c = -5$

వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 + \frac{4}{3}y + \frac{4}{3}x - 5 = 0$

(Or) $3x^2 + 3y^2 + 2x + 4y - 15 = 0$

3. **(2, 0), (0, 2)** బిందువుల గుండా పోతూ **$2x^2 + 2y^2 + 5x – 6y + 4 = 0$** ను లంబంగా ఖండించే వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol. $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ ----(1) ను కావల్సిన వృత్తం అనుకొనుము.

(1) **(2, 0), (0, 2)** బిందువుల గుండా పోతోంది కావున

$\Rightarrow$ $4 + 0 + 4g + c = 0$ ---- (2)

$0 + 4 + 4f + c = 0$ ----- (2)

(1) –(2)$\Rightarrow$ f-g =0 $\Rightarrow g = f$

$x^2 + y^2 + \frac{5}{2}x – \frac{6}{2}y + 2 = 0$ ను (1) లంబంగా ఖండిస్తోంది కావున $\Rightarrow$

$2g\left(\frac{5}{4}\right) + 2f\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 + c$

$\frac{5}{2}g – 3f = 2 + c$

$g = f \Rightarrow \frac{5}{2}g – 3g = 2 + c$

$\Rightarrow – g = 4 + 2c$

(2) నుండి

$–16–8c + c = –4 \Rightarrow c = –\frac{12}{7}$

$\Rightarrow$ $–g\ 4 – \frac{24}{7} = + \frac{4}{7}$

వృత్త సమీకరణం

$x^2 + y^2 – \frac{8x}{7} + \frac{8y}{7} + \frac{12}{7} = 0$

$\Rightarrow 7(x^2 + y^2) – 8x – 8y – 12 = 0$

4. **(2, 3)** కేంద్రం గా గల్గి **$x^2 + y^2 – 4x + 2y – 7 = 0$** ను లంబంగా ఖండించే వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol. ఇచ్చిన వృత్తం $x^2 + y^2 – 4x + 2y – 7 = 0$ -----(1)

కావల్సిన వృత్తం $S=x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

కేంద్రం $(–g, –f) = (2,3)$

$g = –2, f = – 3$

వృత్తాలు లంబంగా ఖండించు కుంటున్నాయి కావున

sakshieducation.com

$\Rightarrow 2gg^1 + 2ff^1 = c + c^1$

$2(-2)(-2) + 2(-3)(1) = -7 + c$

$\Rightarrow 8 - 6 = -7 + c \Rightarrow +2 = -7 + c$

$c = 7 + 2 = 9 \Rightarrow c = 9$

కావల్సిన వృత్తం $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$

\

5. $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0$. వృత్తాల స్పర్శ బిందువు వద్ద ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖను కనుగొనుము

Sol. $S = x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22 = 0$

కేంద్రం $A = (-5, 1)$, వ్యాసార్ధం $r_1 = 2$

$S' = x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8 = 0.$

కేంద్రం $B = (-1, 4)$, వ్యాసార్ధం $r_2 = 3$

$AB = \sqrt{16+9} = 5$

$AB = 5 = 3+2 = r_1 + r_2.$

కావున వృత్తాలు బాహ్యంగా స్పృశించు కుంటున్నాయి.

వృత్తాలు స్పృశించు కుంటున్నాయి కావున ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖ ఆ వృత్తాల మూలాక్షం అవుతుంది.

మూలాక్షం : $S - S' = 0$

$\therefore (x^2 + y^2 + 10x - 2y + 22) - (x^2 + y^2 + 2x - 8y + 8) = 0$

$8x + 6y + 14 = 0$ (or) $4x + 3y + 7 = 0$

6. $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$, $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$ వృత్తాలు స్పృశించు కుంటున్నాయని చూపి స్పర్శ బిందువును కనుగొనుము.

Sol. $S = x^2 + y^2 - 8x - 2y + 8 = 0$

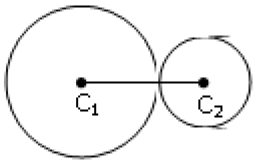
కేంద్రం $C_1 = (4, 1)$; వ్యాసార్ధం $r_1 = \sqrt{16+1-8} = 3$

$S^1 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

కేంద్రం $C_2 = (1, -3)$, వ్యాసార్ధం $r_2 = \sqrt{1+9-6} = 2$

$C_1C_2 = \sqrt{(4-1)^2 + (1+3)^2} = 5$

$r_1 + r_2 = C_1 + C_2$ **0** వృత్తాలు స్పృశించు కుంటున్నాయి.



స్పర్శ బిందువు కేంద్రాలను కలిపే రేఖను $r_1 : r_2$ నిష్ప త్తి లో విభజిస్తుంది.

స్పర్శ బిందువు $= \left(\frac{3(1)+2(4)}{3+2}, \quad \frac{3(-3)+2(1)}{3+2}\right) = (11/5, -7/5)$

7. $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x = 0}$ **,**$\mathbf{x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0}$ **0** వృత్తాలు స్పృశించు కుంటున్నాయని చూపి స్పర్శ బిందువును కనుగొనుము. ఈ వృత్తాలు అంతరంగా లేదా బాహ్యంగా స్పృశించు కుంటున్నాయో తెలుపుము.

Sol. $S = x^2 + y^2 - 2x = 0$

కేంద్రం $C_1 = (1, 0)$, వ్యాసార్ధం $= r_1 = \sqrt{1+0} = 1$

$S' = x^2 + y^2 + 6x - 6y + 2 = 0$

కేంద్రం $C_2 = (-3, 3)$, వ్యాసార్ధం $r_2 = \sqrt{9+9-2} = 4$

$C_1C_2 = \sqrt{(1+3)^2 + (0-3)^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$ $r_1 + r_2 = 1 + 4 = 5$

$C_1C_2 = r_1 + r_2$ కావున వృత్తాలు బాహ్యంగా స్పృశించు కుంటున్నాయి.

స్పర్శ బిందువు కేంద్రాలను కలిపే రేఖను $r_1 : r_2$ నిష్ప త్తి లో అంతరంగా విభజిస్తుంది

$r_1 : r_2 = 1 : 4$

స్పర్శ బిందువు $P = \left(\frac{1(-3)+4(1)}{1+4}, \frac{1(3)+4(0)}{1+4}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

sakshieducation.com

8. **$S \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ and $S' \equiv x^2 + y^2 + 6x + 2y - 90 = 0$** వృత్తాలు అంతరంగా స్పృశించు కుంటున్నాయని చూపి స్పర్శ బిందునును, ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖను కనుగొనుము.

Sol. $S \equiv x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0 \ldots(1)$

$S' \equiv x^2 + y^2 + 6x + 2y - 90 = 0 \ldots(2)$

C_1, C_2 లు వృత్త కేంద్రాలు r_1, r_2 లు వృత్త వ్యాసార్ధాలు అనుకోండి. $C_1 = (1, 2), C_2 = (-3, -1), r_1 = 5, r_2 = 10$

C_1C_2 = వృత్త కేంద్రాల మధ్య దూరం $= 5$

$|r_1 - r_2| = |5 - 10| = 5 = C_1C_2$

$\therefore$ వృత్తాలు అంతరంగా స్పృశించు కుంటున్నాయి. ఉమ్మడి స్పర్శ రేఖ ఆ వృత్తాల మూలాక్షం అవుతుంది.

మూలాక్షం : $S - S' = 0.$

i.e. $4x + 3y - 35 = 0$

స్పర్శ బిందువు కేంద్రాలను కలిపే రేఖను $r_1 : r_2$ నిష్పత్తి లో బా హ్యంగా విభజిస్తుంది

$r_1 : r_2 = 5 : 10 = 1 : 2$

$\therefore$ స్పర్శ బిందువు $= \left(\frac{(1)(-3)-2(1)}{1-2}, \frac{(1)(-1)-2(2)}{1-2}\right) = (5,5)$

9. **$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$, $x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y = 0$** వృత్తాలు స్పృశించు కుంటే **$f'g = fg'$.** అని చూపుము

Sol. $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy = 0$

కేంద్రం $C_1 = (-g, -f)$, వ్యాసార్ధం $r_1 = \sqrt{g^2 + f^2}$

$S^1 = x^2 + y^2 + 2g'x + 2f'y = 0$

$C_2 = (-g', -f'), r_2 = \sqrt{g'^2 + f'^2}$

వృత్తాలు స్పృశిం కుంటే $C_1C_2 = r_1 + r_2$

$\Rightarrow (C_1C_2)^2 = (r_1 + r_2)^2$

$(g' - g)^2 + (f' - f)^2 = g^2 + f^2 + g'^2 + f'^2 + 2\sqrt{g^2 + f^2}\sqrt{g'^2 + f'^2}$

$$-2(gg'+ff') = 2\{g^2g'^2+f^2f'^2+g^2f'^2+f^2g'^2\}^{1/2}$$

$$\Rightarrow (gg'+ff')^2 = g^2g'^2+f^2f'^2+g^2f'^2+f^2g'^2$$

$$g^2g'^2+f^2f'^2+2gg'ff' = g^2g'^2+f^2f'^2+g^2f'^2+f^2g'^2$$
$$\Rightarrow 2gg'ff' = g^2f'^2+f^2g'^2$$
$$\Rightarrow g^2f'^2+f^2g'^2-2gg'ff' = 0$$
$$\Rightarrow (gf'-fg')^2 = 0 \Rightarrow gf' = fg'$$

10. $\mathbf{x^2+y^2-4x-6y+5=0, x^2+y^2-2x-4y-1=0, x^2+y^2-6x-2y=0}$ వృత్తాల మూల కేంద్రం కనుగొనుము.

Sol. వృత్తాలు:

$S = x^2+y^2-4x-6y+5=0$

$S' = x^2+y^2-2x-4y-1=0$

$S'' = x^2+y^2-6x-2y=0$

$S=0$, $S'=0$ ల మూల అక్షం $S-S'=0$

$\Rightarrow -2x-2y+6=0$

$\Rightarrow x+y-3=0$ … (1)

$S'=0$, $S''=0$ ల మూల అక్షం $S'-S''=0$

$\Rightarrow 4x-2y-1=0$ … (2)

(1) , (2) ల నుండి

$x = 7/6,\ y = \frac{11}{6}$

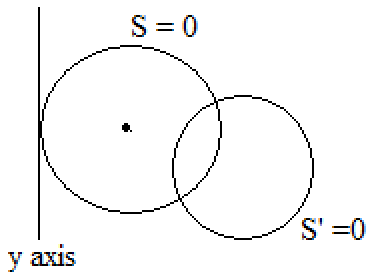
మూల కేంద్రం (7/6, 11/6).

11 . (3, 0)) బిందువు గుండా పోతూ **$x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$** వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండిస్తూ ,

Y- అక్షాన్ని స్పృశించే వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol. (h,k) ను వృత్త కేంద్రం అనుకోండి.

వృత్తం **Y** అక్షాన్ని స్పృశిస్తోంది కావున వ్యాసార్ధం = $|h|$



వృత్త సమీకరణం $(x - h)^2 + (y - k)^2 = h^2$

$S = x^2 - 2hx + y^2 - 2ky + k^2 = 0$

S=0 వృత్తం **(3, 0))** బిందువు గుండా పోతోంది. కావున

$\Rightarrow 9 - 6h + k^2 = 0$ — (i)

S=0, $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 3 = 0$ లు లంబంగా ఉన్నాయి కావున

$\Rightarrow 2(-h)(-3) + 2(-k)(2) = -3 + k^2$

$\Rightarrow 6h - 4k = -3 + k^2$

$\Rightarrow 6h - 4k + 3 - k^2 = 0$----- (2)

$(1) + (2) \Rightarrow 12 - 4k = 0 \Rightarrow k = 3$

$\Rightarrow h = 3,$

వృత్త సమీకరణం $y^2 + x^2 - 6x - 6y + 9 = 0.$

12. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 21 = 0$ ను లంబంగా ఖండిస్తూ $2x + 3y = 7$ రేఖ వెంబడి వ్యాసం గల వృత్త సమీకరణం కనుగొనుము.

Sol. వృత్త సమీకరణం $S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ అనుకోండి.

$x^2 + y^2 - 4x - 6y + 11 = 0$, $x^2 + y^2 - 10x - 4y + 21 = 0$ లను S=0 లంబంగా ఖండిస్తోంది కనుక

$\Rightarrow \quad 2g(-2) + 2f(-3) = 11 + c$ —— (1)

$\Rightarrow \quad 2g(-5) + 2f(-2) = 21 + c$ —— (2)

(1) –(2) $\Rightarrow -6g + 2f = 10$ —— (3)

కేంద్రం (-g,-f), $2x + 3y = 7$ రేఖపై ఉంది కావున

$\therefore -2g - 3f = 7$ —— (4)

(3) , (4) లను సాధించగా

$f = -1, g = -2,$

(1), నుండి $c = 3$

వృత్త సమీకరణం $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 3 = 0$

13. $2x + 3y = 1$ రేఖ $x^2 + y^2 = 4$ వృత్తాన్ని A , B బిందువుల వద్ద ఖండిస్తే AB వ్యాసంగా గల వృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol. వృత్త సమీకరణం $S = x^2 + y^2 = 4$

సరళ రేఖ $L = 2x + 3y = 1$.

S=0 , L=0 ల ఖండన బిందువుల గుండా పోయే వృత్త సమీకరణం $S + \lambda L = 0$

$\Rightarrow (x^2 + y^2 - 4) + \lambda(2x + 3y - 1) = 0$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 2\lambda x + 3\lambda y - 4 - \lambda = 0$

$\Rightarrow$ కేంద్రం $\left(-\lambda, \frac{-3\lambda}{2}\right)$

కేంద్రం $2x + 3y - 1 = 0$ రేఖ పై ఉంది. $\Rightarrow 2(-\lambda) + 3\frac{-3\lambda}{2} - 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda = \frac{-2}{13}$

$\therefore$ వృత్త సమీకరణం

$13(x^2 + y^2) - 4 \times 13 - 2(2x + 3y - 1) = 0$

$13(x^2 + y^2) - 4x - 6y - 50 = 0.$

14. $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 23 = 0$ వృత్తాల ఉమ్మడి జ్యా రెండవ వృత్తానికి వ్యాసం అని చూపి దాని పొడవును కనుక్కోండి

Sol. $S = x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$, $S' = x^2 + y^2 - 8x - 6y + 23 = 0$

ఉమ్మడి జ్యా $S - S' = 0$

$\Rightarrow (x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9) - (x^2 + y^2 - 8x - 6y + 23) = 0$

$\Rightarrow 2x + 2y - 14 = 0$

$\Rightarrow x + y - 7 = 0 \ldots (i)$

కేంద్రం $(4, 3)$ ని $x + y - 7 = 0$ సమీకరణం లో ప్రతిక్షేపించగా

$4 + 3 - 7 = 0 \Rightarrow 0 = 0$.

ఉమ్మడి జ్యా (i) , $S' = 0$. వృత్తానికి వ్యాసం అవుతోంది.

వ్యాసార్ధం= $\sqrt{4^2 + 3^2 - 23} = \sqrt{2}$

వ్యాసం $= 2\sqrt{2}$

15. $x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$, $x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$ వృత్తాల ఉమ్మడి జ్యా సమీకరణం ను మరియు దాని పొడవును కనుక్కోండి.

Sol. $S = x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1 = 0$,

$S' = x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2 = 0$

ఉమ్మడి జ్యా సమీకరణం $S - S' = 0$

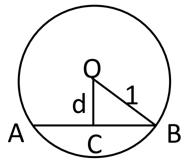
$(x^2 + y^2 + 2x + 2y + 1) - (x^2 + y^2 + 4x + 3y + 2) = 0$

$-2x - y - 1 = 0 \Rightarrow 2x + y + 1 = 0$

$S = 0$ కేంద్రం $(-1, -1)$

వ్యాసార్ధం $= \sqrt{1 + 1 - 1} = 1$

$(-1, -1)$ కేంద్రం నుండి జ్యా మీదకు గీసిన లంబం = $d = \left|\frac{2(-1) + (-1) + 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}}\right| = \frac{2}{\sqrt{5}}$



AB=2BC

ఉమ్మడి జ్యా పొడవు= $2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

sakshieducation.com

SYSTEM OF CIRCLES

1. క్రింద ఇచ్చిన మూడు వృత్తాలలో ప్రతీ వృత్తాన్ని లంబఛేదనం చేసే వృత్త సమీకరణాన్ని కనుక్కోండి.

1) $x^2+y^2+2x+4y+1=0$;

$x^2+y^2-2x+6y-3=0$;

$2x^2+2y^2+6x+8y-3=0$

A. వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

దత్త వృత్తము పై 3 వృత్తాను లంబంగా ఉంటుంది కనుక $2g(1)+2f(2)=c+1$ .... (i)

$2g\left(\frac{3}{2}+2f(2)\right)=c-\frac{3}{2}$ .... (ii)

$2f(-1)+2f(3)=c-3$ .... (iii)

(iii) - (ii)

$-5g+2f=\frac{-3}{2}$ $\quad -10g+4f=-3$ .... (iv)

(iii) - (i)

$-4g+2f=-4$

$f-2g=-2$ .... (v)

(iv), (v) లను సాధించగా,

$f=-7,\ g=-5/2,\ c=-34$

$\therefore$ వృత్త సమీకరణము

$x^2+y^2-5x-14y-34=0$

www.sakshieducation.com

2) $x^2+y^2+2x+17y+4=0$, $x^2+y^2+7x+6y+11=0$, $x^2+y^2-x+22y+3=0$

SOL. $x^2+y^2+2x+17y+4=0 \longrightarrow (1)$

$x^2+y^2+7x+6y+11=0 \longrightarrow (2)$

$x^2+y^2-x+22y+3=0 \longrightarrow (3)$

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ దత్త వృత్తము పై 3 వృత్తాను లంబంగా ఉంటుంది కనుక

$\Rightarrow 2g+17f=c+4 \longrightarrow (5)$

$\Rightarrow 7g+6f=c+11 \longrightarrow (6)$

$\Rightarrow -g+22f=c+3 \longrightarrow (7)$

(5) - (6) $\Rightarrow -5g+11f=-7 \longrightarrow (8)$

(6) - (7) $\Rightarrow 8g-16f=8 \Rightarrow g-2f=1 \longrightarrow (9)$

(8) + 5×(9)$\Rightarrow f=-2$

(9) $\Rightarrow g-2(-2)=1 \Rightarrow g=-3$

(5) $\Rightarrow 2(-3)+17(-2)=c+4 \Rightarrow c=-44$.

$\therefore$ వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2-6x-4y-44=0$

3. $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ వృత్తాన్ని లంబంగా ఖండిస్తూ ,మూల బిందువు గుండా పోతూ $x+y=4$ అనే రేఖ పై కేంద్రం గల వృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

Sol :

వృత్తం $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \longrightarrow (1)$ అనుకుందాం

దత్త వృత్తము $x^2+y^2-4x+2y+4=0$ ను లంబంగా ఉంటుంది

$\Rightarrow -4g+2f=c+4 \longrightarrow (2)$

(1) మూల బిందువు గుండా పోతోంది కావున $\Rightarrow c=0$

(2) $\Rightarrow -4g+2f=4 \longrightarrow (3)$

(1) కేంద్రం $(-g,-f)$

కేంద్రం $x+y=4$ పై ఉంది. కావున

$\Rightarrow -g-f=4 \longrightarrow (4)$

(3) + 2(4) $\Rightarrow -6g=12 \Rightarrow g=-2$

(4) $\Rightarrow -(-2)-f=4 \Rightarrow f=2-4=2$

www.sakshieducation.com

$\therefore$ వృత్త సమీకరణము $x^2+y^2-4x-4y=0$

18. $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c}$ **అయితే** $x^2+y^2+2ax+c=0$, $x^2+y^2+2by+c=0$ **వృత్తాలు ఒకదానికొకటి స్పృశించుకుంటాయని చూపండి.**

A. వృత్తాల కేంద్రాలు $C_1(-a,0)$ మరియు $C_2(0,-b)$

1 వ వృత్త వ్యాసార్థము $\sqrt{a^2-c}=r_1$

2 వ వృత్త వ్యాసార్థము $\sqrt{b^2-c}=r_2$

$C_1C_2=r_1+r_2$

$(C_1C_2)^2=(r_1+r_2)^2$

$(a^2+b^2)=a^2-c+b^2-c+2\sqrt{a^2-c}\sqrt{b^2-c}$

$c=\sqrt{a^2-c}.\sqrt{b^2-c}$

$c=(a^2-c)(b^2-c)$

$c^2=-c(a^2+b^2)+a^2b^2+c^2$

లేదా $c(a^2+b^2)=a^2b^2$ లేదా $\frac{1}{c}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$

iii. $x^2+y^2+2x+17y+4=0$

$x^2+y^2+7x+6y+11=0$

$x^2+y^2-x+22y+3=0$

A. దత్త వృత్తాల సమీకరణము

$S_1\equiv x^2+y^2+2x+17y+4=0$ ... (i)

$S_1\equiv x^2+y^2+7x+6y+11=0$ .... (ii)

$S_1\equiv x^2+y^2-x+22y+3=0$ .... (iii)

$S=0,\ S_1=0$ ల మూలాక్షము $S-S_1=0$

$-5x+11y-7=0$

www.sakshieducation.com

$5x - 11y + 7 = 0$ .... (iv)

$S = 0, S_{11} = 0$ ల మూలాక్షము $S - S_{11} = 0$

$3x - 5y + 1 = 0$ .... (v)

(iv), (v) లను సాధించగా

$x \quad y \quad 1$

$\begin{matrix} -11 & 7 & 5 & -11 \\ -5 & 1 & 3 & -5 \end{matrix}$

$$\frac{x}{-11+35} = \frac{y}{21-5} = \frac{1}{-25+33}$$

$$x = \frac{24}{8} = 3, \ y = \frac{16}{8} = 2$$

మూల కేంద్రము $P(3,2)$

PT = P నుండి S = 0 కు స్పర్శరేఖ పొడవు

$= \sqrt{9+4+6+34+4} = \sqrt{57}$

దత్త వృత్తాలను లంబంగా ఖండించే వృత్త సమీకరణము

$(x-3)^2 + (y-2)^2 = 57$

$x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 - 57 = 0$

$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 44 = 0$

www.sakshieducation.com

దీర్ఘ వృత్తం

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. క్రింది దీర్ఘవృత్తాలకు ఉత్కేంద్రత, నాభుల నిరూపకాలు, నియతరేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

i. దీర్ఘవృత్త సమీకరణము

$9x^2+16y^2-36x+32y-92=0$

A. $9x^2+16y^2-36x+32y-92=0$

$9\left(x^2-4x+4\right)+16\left(y^2+2y+1\right)=92+36+16$

$9(x-2)^2+16(y+1)^2=144$

$$\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+1)^2}{9}=1$$

$a^2=16,\ b^2=9 \Rightarrow a=4,\ b=3$

$$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{16-9}{16}}=\frac{\sqrt{7}}{4}$$

నాభులు $(h \pm ae, k)=\left(2 \pm 4.\frac{\sqrt{7}}{4}, -1\right)$

$=\left(2 \pm \sqrt{7}, -1\right)$

నాభిలంబం పొడవు

$$\frac{2.b^2}{a}=\frac{2.9}{4}=\frac{9}{2}$$

నియత రేఖల సమీకరణాలు $x=h \pm \frac{a}{e}$

$$x=2 \pm \frac{4 \times 4}{\sqrt{7}}$$

$\sqrt{7}x=2\sqrt{7} \pm 16$

www.sakshieducation.com

ii) $9x^2 + 16y^2 = 144$
iii) $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$
iv) $x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$

Sol. ii) $9x^2 + 16y^2 = 144$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

$\therefore$ a = 4, b = 3 ,a>b

దీర్ఘ రేఖ పొడవు = 2a = 2 × 4 = 8

హ్రస్వ రేఖ పొడవు = 2b = 2 × 3 = 6

$$= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\cdot 9}{4} = \frac{9}{2}$$

$$e = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{16-9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

కేంద్రం C(0, 0)

నాభులు (±ae, 0) = $(\pm\sqrt{7}, 0)$

నియత రేఖల సమీకరణాలు

$$x = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x = \pm 4\cdot\frac{4}{\sqrt{7}} = \pm\frac{16}{\sqrt{7}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{7}x = \pm 16$$

ii) $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

$$4(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) = -1$$

$$4\left((x-1)^2 - 1\right) + \left((y+1)^2 - 1\right) = -1$$

$$4(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 + 1 - 1 = 4$$

$$\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y+1)^2}{4} = 1$$

a = 1, b = 2 , a < b $\Rightarrow$ y-దీర్ఘ రేఖ

దీర్ఘ రేఖ పొడవు = 2b = 4

హ్రస్వ రేఖ పొడవు = 2a = 2

నాభిలంబం పొడవు $= \frac{2a^2}{b} = \frac{2}{2} = 1$

$$e = \sqrt{\frac{b^2 - a^2}{b^2}} = \sqrt{\frac{4-1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

www.sakshieducation.com

కేంద్రం c(–1, 1)

$$e = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

నాభులు $(-1, 1\pm\sqrt{3})$

నియత రేఖల సమీకరణాలు

$$y+1 = \pm\frac{b}{e} = \pm\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}y + \sqrt{3} = \pm 4$$

$$\sqrt{3}y + \sqrt{3} \pm 4 = 0$$

iii) $x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$

$x^2 - 4x + 2(y^2 + 6y) = -14$

$\Rightarrow (x^2 - 4x + 4) + 2(y^2 + 6y + 9) = 4+18-14$

$\Rightarrow (x-2)^2 + 2(y+3)^2 = 8$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{8} + \frac{(y+3)^2}{4} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{(2\sqrt{2})^2} + \frac{(y+3)^2}{2^2} = 1$$

$a = 2\sqrt{2}, b = 2, h = 2, k = -3$

దీర్ఘ రేఖ పొడవు $= 2a = 2(2\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$

హ్రస్వ రేఖ పొడవు $= 2b = 2 \times 2 = 4$

నాభిలంబం పొడవు

$$= \frac{2b^2}{a} = \frac{2\cdot 4}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$$e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1-\frac{4}{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

కేంద్రం = (h, k) = (2, –3)

నాభులు $= (h \pm ae, k) = (2 \pm 2, -3)$

$= (4, -3), (0, -3)$

నియత రేఖల సమీకరణాలు

$$x - h = \pm\frac{a}{e} \Rightarrow x - 2 = \pm\frac{2\sqrt{2}}{(1/\sqrt{2})}$$

$\Rightarrow x - 2 = \pm 4$

i.e. $x = 6, x = -2$

www.sakshieducation.com

2. నాభిలంబం పొడవు, హ్రస్వాక్షం పొడవులో సగం ఉంటే దీర్ఘవృత్తం (ప్రామాణిక రూపంలో) ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.

A. నాభిలంబం పొడవు $= \frac{1}{2}$ (హ్రస్వాక్షము)

$$2\frac{b^2}{a} = \frac{1}{2}(2b)$$

$$2\frac{b^2}{a} = b$$

$$a = 2b$$

$$a^2 = 4b^2 \Rightarrow a^2 = 4a^2\left(1-e^2\right)$$

$$1-e^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow e^2 = \frac{3}{4}$$

$$e = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. $x^2+2y^2-4x+12y+14=0$ దీర్ఘవృత్తంపై $(2,-1)$ బిందువు వద్ద స్పర్శరేఖ, అభిలంబ రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

A. స్పర్శరేఖ సమీకరణం

$$xx_1+2yy_1-2(x+x_1)+6(y+y_1+14)=0$$

$$\Rightarrow 2x-2y-2(x+2)+6(y-1)+14=0$$

$$\Rightarrow 4y+4=0$$

దీర్ఘవృత్త స్పర్శరేఖ సమీకరణం $y=-1$

స్పర్శరేఖ వాలు '0'

అభిలంబ రేఖా సమీకరణం

$$y+1=\frac{-1}{0}(x-2)$$

www.sakshieducation.com

4. $x^2+3y^2=3$ దీర్ఘవృత్తానికి $4x+y+k=0$ స్పర్శరేఖ అయితే k విలువ కనుక్కోండి.

A. దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $x^2+3y^2=3$

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=1$$

$a^2=3, b^2=1,$ రేఖా సమీకరణము $4x+y+k=0$

$y=-4x-k$

$m=-4, c=-k$

స్పర్శరేఖా నియమము $c^2=a^2m^2+b^2$

$(-k)^2=3(-4)^2+1$

$k^2=48+1=49$

$k=\pm 7$

5. నియత రేఖ $x+y+2=0$ గాను, $e=\frac{2}{3}$, ఒక నాభి $(1,-1)$ వద్ద గల దీర్ఘవృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

A. $P(x_1, y_1)$ దీర్ఘవృత్తం మీద బిందువు

నియత రేఖ సమీకరణం

$x+y+2=0$

ZM కు లంబంగా PM ను గీద్దాం SP లని కలుపుదాం

నిర్వచన ప్రకారం SP = e . PM

$SP^2=e^2.PM^2$

$$(x_1-1)^2+(y_1+1)^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2\left[\frac{x_1+y_1+2}{\sqrt{1+1}}\right]^2$$

$$(x_1-1)^2+(y_1+1)^2=\frac{4}{9}\frac{(x_1+y_1+2)^2}{2}$$

$$9\left[(x_1-1)^2+(y_1+1)^2\right]=2\left[x_1+y_1+2\right]^2$$

$$9\left[x_1^2-2x_1+1+y_1^2+2y_1+1\right]$$

www.sakshieducation.com

$= 2\left[x_1^2 + y_1^2 + 4 + 2x_1y_1 + 4x_1 + 4y_1\right]$

$9x_1^2 + 9y_1^2 - 18x_1 + 18y_1 + 18$

$= 2x_1^2 + 2y_1^2 + 4x_1y_1 + 8x_1 + 8y_1 + 8$

$7x_1^2 - 4x_1y_1 + 7y_1^2 - 26x_1 + 10y_1 + 10 = 0$

$P(x_1, y_1)$

$7x^2 - 4xy + 7y^2 - 26x + 10y + 10 = 0$

ఇది కావలసిన దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం

6. **నాభి లంబ పొడవు $\frac{15}{2}$, నాభుల మధ్య దూరం 2 గా గల దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం ప్రామాణిక రూపంలో కనుక్కోండి.**

A. నాభి లంబ పొడవు $= \frac{15}{2}$

నాభుల మధ్య దూరము $= 2$

$\frac{2b^2}{a} = \frac{15}{2},\ 2ae = 2$

$ae = 1$

$\Rightarrow b^2 = a^2 - a^2e^2$

$\Rightarrow b^2 = a^2 - 1$

$\Rightarrow \frac{15}{4}a = a^2 - 1$

$\Rightarrow 4a^2 - 15a + 4 = 0$ $\qquad b^2 = a^2 + 1$

$a = 4 \quad a = -\frac{1}{4}$ $\qquad = 16 - 1$

దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{15} = 1$

www.sakshieducation.com

7. **నాభుల మధ్య దూరము 8, నియత రేఖల మధ్య దూరము 32 గా గల దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం ప్రామాణిక రూపంలో కనుక్కోండి.**

A. నాభుల మధ్య దూరము = 8

నియత రేఖల మధ్య దూరము = 32

$2ae = 8$ $\qquad$ $\frac{2a}{e} = 32$

$ae = 4$ $\qquad$ $\frac{a}{e} = 16$

$(ae)\left(\frac{a}{e}\right) = 64$

$a^2 = 64$

$b = a^2 - a^2e^2$

= 64 - 16 = 48

దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం

$\therefore \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{48} = 1$

8. **ప్రామాణిక రూపంలో దీర్ఘవృత్తపు నాభిలంబం పొడవు దీర్ఘాక్షం పొడవులో సగం ఉంటే, ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.**

A. నాభి లంబం = $\frac{2b^2}{a}$

దీర్ఘాక్షం = 2a

దత్తాంశం ప్రకారం $\frac{2b^2}{a} = \frac{1}{2}, 2a$

$2b^2 = a^2$

$b^2 = a^2\left(1 - e^2\right)$

$2a^2\left(1 - e^2\right) = a^2$

$1 - e^2 = \frac{1}{2}$

www.sakshieducation.com

$$e^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow e = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

9. $(-2,2),(3,-1)$ బిందువుల గుండా పోతూ, ప్రామాణిక రూపంలో దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం కనుక్కోండి.

A. ప్రామాణిక రూపంలో దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$(-2,2),(3,-1)$ బిందువుల గుండా పోతుంది

$$\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \text{ .... (i)}$$

$$\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \text{ .... (ii)}$$

(i), (ii) లను సాధించగా

$$\frac{1}{a^2} = \frac{3}{32} ; \frac{1}{b^2} = \frac{5}{32}$$

$$\frac{3x^2}{32} + \frac{5y^2}{32} = 1$$

$\therefore$ దీర్ఘవృత్తం సమీకరణం

$$3x^2 + 5y^2 = 32$$

10. ఈ క్రింది దీర్ఘవృత్తాలకు, దీర్ఘాక్షం, హ్రస్వాక్షం, నాభిలంబం పొడవులు, ఉత్కేంద్రత, కేంద్రం, నాభుల నిరూపకాలు, నియత రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

i) $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

iii) $x^2 + 2y^2 - 4x + 12y + 14 = 0$

A.

i. దత్త సమీకరణం $4x^2 + y^2 - 8x + 2y + 1 = 0$

$$4(x^2 - 2x) + (y^2 + 2y) = -1$$

$$4(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4 + 1 - 1 = 4$$

www.sakshieducation.com

$$\frac{(x-1)^2}{1}+\frac{(y+1)^2}{4}=1$$

$a<b$ కనుక $\Rightarrow Y-$అక్షం దీర్ఘాక్షము

$a=1, b=2$

దీర్ఘాక్షం పొడవు = $2b=4$

హ్రస్వాక్షం పొడవు = $2a=2$

నాభి లంబం పొడవు = $\frac{2a^2}{b}=\frac{2}{2}=1$

ఉత్కేంద్రత = $\sqrt{\frac{b^2-a^2}{b^2}}=\sqrt{\frac{4-1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

కేంద్రం $C(-1,1)$

$be=2.\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$

నాభులు $(-1,1\pm\sqrt{3})$

నియత రేఖల సమీకరణాలు $y+1=\pm\frac{b}{e}$

$=\pm\frac{4}{\sqrt{3}}$

$\sqrt{3}y+\sqrt{3}=\pm 4$

$\sqrt{3}y+\sqrt{3}\pm 4=0$

ii. దత్త సమీకరణం $x^2+2y^2-4x+12y+14=0$

$x^2-4x+2(y^2+6y)=-14$

$\Rightarrow (x^2-4x+4)+2(y^2+6y+9)=4+18-14$

$\Rightarrow (x-2)^2+2(y+3)^2=8$

$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{8}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$

www.sakshieducation.com

$$\Rightarrow \frac{(x-2)^2}{\left(2\sqrt{2}\right)^2}+\frac{(y+3)^2}{2^2}=1 \quad a=2\sqrt{2},\ b=2,\ h=2,\ k=-3$$

దీర్ఘాక్షం పొడవు = $2a=2\left(2\sqrt{2}\right)=4\sqrt{2}$

హ్రస్వాక్షం పొడవు = $2b=2(2)=4$

నాభి లంబం పొడవు = $\frac{2b^2}{a}=\frac{2(4)}{2\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

ఉత్కేంద్రత = $\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{4}{8}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

కేంద్రం $C=(h,k)=(2,-3)$

నాభులు = $(h\pm ae,k)=(2\pm 2,-3)$

= $(4,-3),(0,-3)$

నియత రేఖల సమీకరణాలు $x-h=\pm\frac{a}{e}$

$$x-2k=\pm\frac{2\sqrt{2}}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

$x-2=\pm 4$

i.e, $x=6,\ x=-2$

www.sakshieducation.com

11. కేంద్రం $(4,-1)$, హ్రస్వాక్షం కొన $(-1,-1)$ బిందువు $(8,0)$ గుండా పోతుంది.

A. $a=\sqrt{(4+1)^2+(-1+1)^2}$

$a=5$

దీర్ఘవృత్తం $(8,0)$ గుండా పోతుంది

$$\frac{(8-4)^2}{25}+\frac{(0+1)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{1}{b^2}=1-\frac{16}{25}$$

$$\frac{1}{b^2}=\frac{9}{25}$$

$\therefore$ కావలసిన దీర్ఘవృత్త సమీకరణం

$$\frac{(x-4)^2}{25}+\frac{9}{25}(y+1)^2=1$$

$$(x-4)^2+9(y+1)^2=25$$

12. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ దీర్ఘవృత్తానికి $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$ స్పర్శరేఖ కావడానికి నియమము కనుక్కోండి.

A. దీర్ఘవృత్త సమీకరణం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ .... (1)

సరళరేఖ సమీకరణం $x\cos\alpha+y\sin\alpha=p$

$$y\sin\alpha=-x\cos\alpha+p$$

$$y=-x.\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{p}{\sin\alpha}$$

$$\therefore m=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ c=\frac{p}{\sin\alpha}$$

స్పర్శరేఖా నియమము $c^2=a^2m^2+b^2$

$$\frac{p^2}{\sin\alpha}=a^2.\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+b^2$$

www.sakshieducation.com

లేదా $p^2 = a^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha$

13. $2x^2 + y^2 = 8$ దీర్ఘవృత్తానికి కింది నియమాలు పాటించే స్పర్శరేఖ సమీకరణాలు కనుక్కోండి.

i) $x - 2y - 4 = 0$ సరళ రేఖకు సమాంతరంగా

A.

i. స్పర్శరేఖ వాలు = $\frac{1}{2}$

స్పర్శరేఖా నియమము $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$$y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{a^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + b^2}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = 1$$

$$y = \frac{1}{2}x \pm \sqrt{4 \times \frac{1}{4} + 8}$$

$$y = \frac{1}{2}x \pm 3$$

స్పర్శరేఖల సమీకరణము $2y - x \pm 6 = 0$

లేదా $x - 2y \pm 6 = 0$

ii. $x + y + 2 = 0$ సరళ రేఖకు లంబంగా

స్పర్శరేఖ దత్త రేఖకు లంబంగా ఉండి కనుక దాని వాలు 1

స్పర్శరేఖా సమీకరణము $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

$$y = x \pm \sqrt{4 + 8}$$

స్పర్శరేఖా సమీకరణము

$$y = x \pm 2\sqrt{3}$$

$$x - y \pm 2\sqrt{3} = 0$$

www.sakshieducation.com

iii. X - అక్షంతో $\frac{\pi}{4}$ కోణం చేసే

A. స్పర్శరేఖా సమీకరణము $y = x \pm 2\sqrt{3}$

14. OB ప్రస్వాక్షంగా గల దీర్ఘవృత్తం నాభులు $S, S', \angle SBS'$ లంబకోణం అయితే ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.

A. నాభులు $S(ae, 0)$

మరియు $S'(-ae, 0)$

B నిరూపకాలు $(0, b)$

SB వాలు = $\frac{b}{-ae}$, SB' వాలు = $\frac{b}{ae}$

$SBS' = 90° \Rightarrow SB$ వాలు $\times S'B = -1$

$-\frac{b}{ae} \cdot \frac{b}{ae} = -1$

$b^2 = a^2e^2$

$a^2(1-e^2) = a^2e^2$

$1 - e^2 = e^2 \Rightarrow 2e^2 = 1$

$e^2 = \frac{1}{2}$

$e^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

15. $9x^2 + 16y^2 = 144$ దీర్ఘవృత్తానికి అనుబంధ (సహాయక) వృత్త సమీకరణం కనుక్కోండి.

A. దీర్ఘవృత్త సమీకరణము $9x^2 + 16y^2 = 144$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 16, b^2 = 9$

సహాయక వృత్త సమీకరణము

$x^2 + y^2 = a^2$

www.sakshieducation.com

$x^2 + y^2 = 16$

16. దీర్ఘవృత్తం యొక్క దీర్ఘాక్షం పొడవు, హ్రస్వాక్షాల పొడవుకు మూడు రెట్లు ఉంటే ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.

A. దీర్ఘాక్షము = 3

$2a = 3(2b) \Rightarrow a = 3b$

$a = 9b^2 \Rightarrow a^2 = 9a^2(1-e^2)$

$1-e^2 = \frac{1}{9} \Rightarrow e^2 = 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

$e = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

దీర్ఘవృత్త ఉత్కేంద్రత = $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

17. దీర్ఘవృత్తం $9x^2 + 16y = 144$ యొక్క నాభుల గుండా పోతూ కనిష్ఠ వ్యాసార్ధం గల వృత్త వ్యాసార్ధం కనుక్కోండి.

A. దీర్ఘవృత్త సమీకరణము $9x^2 + 16y = 144$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1\ a^2 = 16, b^2 = 9$

$a = 4, b = 3$

వృత్తం SS' ల గుండా పోతూ కనిష్ఠ వ్యాసార్ధం కలిగి ఉంది

$\therefore$ S, S' వ్యాసం అవుతుంది

$a^2e^2 = a^2 - a^2(1-e^2) = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$

కావలసిన వృత్త సమీకరణము $x^2 + y^2 = 7$

www.sakshieducation.com

18. **ఒక దీర్ఘవృత్తపు నాభులు S, T లు, హ్రస్వాక్షపు ఒక కొన B. STB ఒక సమబాహు త్రిభుజం అయితే దీర్ఘవృత్తం ఉత్కేంద్రత కనుక్కోండి.**

A. దీర్ఘవృత్త సమీకరణము $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$S(ae,0), T(-ae,0)$ లు నాభులు

$B(0,b)$ హ్రస్వాక్షం కొన

STB సమబాహు త్రిభుజం

$SB = ST \Rightarrow SB^2 = ST^2$

$a^2e^2 + b^2 = 4a^2e^2$

$b^2 = 3a^2e^2$

$a^2(1-e^2) = 3a^2e^2$

$1-e^2 = 3e^2$

$4e^2 = 1$

$e^2 = \frac{1}{4}$

$\therefore$ దీర్ఘవృత్తం ఉత్కేంద్రత $= e = \frac{1}{2}$

19. **ఒకటో పాదంలో నాభిలంబాగ్రం వద్ద $9x^2+16y^2=144$ దీర్ఘవృత్తానికి స్పర్శరేఖ, అభిలంబ రేఖల సమీకరణాలు కనుక్కోండి.**

A. దీర్ఘవృత్తం $9x^2+16y^2=144$

$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

$e=\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}}=\frac{16-9}{16}=\frac{\sqrt{7}}{4}$

మొదటి పాదంలో నాభి లంబము కొన

$P\left(ae,\frac{b^2}{a}\right)=\left(\sqrt{7},\frac{9}{4}\right)$

www.sakshieducation.com

P వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$$

$$x.\frac{\sqrt{7}}{16}+\frac{y}{9}.\left(\frac{9}{4}\right)=1$$

$$\frac{\sqrt{7}x}{16}+\frac{y}{4}=1$$

లేదా $\sqrt{7}x+4y=16$

20. i) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ దీర్ఘవృత్తానికి $lx+my+n=0$ స్పర్శరేఖ కావడానికి

ii) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ దీర్ఘవృత్తానికి $lx+my+n=0$ అభిలంబ రేఖ కావడానికి నియమాలు కనుక్కోండి.

A.

i. దీర్ఘవృత్త సమీకరణము $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$P(\theta)$ వద్ద స్పర్శరేఖ సమీకరణము

$$\frac{x}{a}\cos\theta+\frac{y}{b}\sin\theta=1 \quad .... (1)$$

దత్తరేఖ సమీకరణము $lx+my=-n$ .... (2)

(1), (2) లు ఒకే రేఖను సూచిస్తున్నాయి

Q® Hê # ° ‡ ê óQê

$$\frac{\cos\theta}{\frac{a}{l}}=\frac{\sin\theta}{\frac{b}{m}-n}=\frac{1}{-n}$$

$$\frac{\cos\theta}{al}-\frac{\sin\theta}{bm}=\frac{1}{-n}$$

$$\cos\theta=-\frac{al}{n}\sin\theta=-\frac{bm}{n}$$

www.sakshieducation.com

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\frac{a^2l^2}{n^2} + \frac{b^2m^2}{n^2} = 1$$

$\Rightarrow a^2l^2 + b^2m^2 = n^2$ ఇది కావలసిన నియమం

ii. $lx + my + n = 0$ రేఖ $P(\alpha)$ వద్ద అభిలంబ రేఖ

$P(\alpha)$ వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణము

$$\frac{ax}{\cos\theta} - \frac{by}{\sin\theta} = a^2 - b^2 \quad .... (1)$$

$= lx + my = -n \quad .... (2)$

(1), (2) లను పోల్చగా

$$\frac{l}{\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)} = \frac{m}{\left(\frac{-b}{\sin\theta}\right)} = \frac{-n}{a^2 - b^2}$$

$$\frac{l\cos\theta}{a} = \frac{-m\sin\theta}{b} = \frac{-n}{a^2 - b^2}$$

$$\cos\theta = \frac{-an}{l\left(a^2 - b^2\right)}, \sin\theta = \frac{bn}{m\left(a^2 - b^2\right)}$$

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\frac{a^2n^2}{l^2\left(a^2 - b^2\right)^2} + \frac{b^2n^2}{m\left(a^2 - b^2\right)^2} = 1$$

$$\frac{a^2}{l^2} + \frac{b^2}{m^2} = \frac{\left(a^2 - b^2\right)^2}{n^2}$$ కావలసిన నియమము

www.sakshieducation.com

21 దీర్ఘవృత్తం $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ నాభిలంబం ఒక కొన వద్ద అభిలంబ రేఖ హ్రస్వాక్షపు ఒక కొన ద్వారా పోతే $e^4+e^2=1$ అని చూపండి. (దీర్ఘవృత్తం ఉత్కేంద్రత e)

A. దీర్ఘవృత్త సమీకరణము $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

అభిలంబ రేఖ సమీకరణము

$$\frac{a^2x}{x_1}-\frac{b^2y}{y_1}=a^2-b^2$$

$L\left(ae, b^2/a\right)$ వద్ద అభిలంబ రేఖ సమీకరణము

$$\frac{a^2x}{ae}-\frac{b^2y}{\left(b^2/a\right)}=a^2-b^2$$

$$\frac{ax}{e}-ay=a^2e^2$$

ఈ అభిలంబ రేఖ $B'(0,-b)$ గుండా పోతుంది

$$ab=a^2e^2$$

$$\Rightarrow b=ae^2$$

$$b^2=a^2e^4$$

$$a^2\left(1-e^2\right)=a^2e^4$$

$$e^4+e^2=1$$

www.sakshieducation.com

పాక్షిక భిన్నాలు

Very Short Answer Questions

I. ఈ క్రింది వానిని పాక్షికభిన్నాలు గా విడగొట్టండి.

1. $\dfrac{2x+3}{(x+1)(x-3)}$

Sol. $\dfrac{2x+3}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-3}$

$2x+3=A(x-3)+B(x+1)$

$x=-1\Rightarrow 1=A(-4)\Rightarrow A=-\dfrac{1}{4}$

$x=3\Rightarrow 9=B(4)\Rightarrow B=\dfrac{9}{4}$

$\dfrac{2x+3}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{-1}{4(x+1)}+\dfrac{9}{4(x-3)}$

2. $\dfrac{5x+6}{(2+x)(1-x)}$

Sol. Let $\dfrac{5x+6}{(2+x)(1-x)}=\dfrac{A}{2+x}+\dfrac{B}{1-x}$

$(2 + x)(1 – x)$

$5x + 6 = A(1 – x) + B(2 + x)$

$x = –2, –10 + 6 = A(1 + 2) \Rightarrow A = -\dfrac{4}{3}$

$x = 1, 5 + 6 = B(2 + 1) \Rightarrow B = \dfrac{11}{3}$

$\therefore \dfrac{5x+6}{(2+x)(1-x)}=-\dfrac{4}{3(2+x)}+\dfrac{11}{3(1-x)}$

Short Answer Questions

1. $\frac{3x+7}{x^2-3x+2}$

Sol:

$$\frac{3x+7}{x^2-3x+2}=\frac{3x+7}{(x-2)(x-1)}$$

Let $\frac{3x+7}{x^2-3x+2}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-1)}$

$\Rightarrow A(x-1)+B(x-2)=3x+7 \quad \ldots (1)$

x = 2 ప్రతిక్షేపించగా

A = 13

x = 1 ప్రతిక్షేపించగా

–B = 10 i.e., B = –10

$$\therefore \frac{3x+7}{x^2-3x+2}=\frac{13}{x-2}-\frac{10}{x-1}$$

2. $\frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}$

Sol. $\frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{x-2}$

$$x+4=A(x^2-4)+B(x+1)(x-2)+C(x+1)(x+2)$$

$x=-1 \Rightarrow 3=A(1-4)=-3A \Rightarrow A=-1$

$x=-2 \Rightarrow 2=B(-2+1)(-2-2)=4B$

$\Rightarrow B=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

$x=2 \Rightarrow 6=C(2+1)(2+2)=12C \Rightarrow C=\frac{1}{2}$

$$\therefore \frac{x+4}{(x^2-4)(x+1)}=-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2(x+2)}+\frac{1}{2(x-2)}$$

3. $\frac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}$

Sol. Let $\frac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}=\frac{2x^2+2x+1}{x^2(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+1}$

$x^2(x + 1)$ తో గుణించగ

$2x^2 + 2x + 1 = A\,x(x + 1) + B(x + 1) + Cx^2$

Put x = 0, 1 = B

Put x = –1, 2 – 2 + 1 = C(1) $\Rightarrow$ C = 1

x^2 పద గుణకాలను పోల్చగ

$2 = A + C \Rightarrow A = 2 – C = 2 – 1 = 1$

$\therefore \frac{2x^2+2x+1}{x^3+x^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x+1}$

4. $\frac{2x+3}{(x-1)^3}$

Sol. x – 1 = y అనుకోండి అప్పుడు

x = y + 1

$\Rightarrow \frac{2x+3}{(x-1)^3}=\frac{2(y+1)+3}{y^3}=\frac{2y+5}{y^3}$

$=\frac{2}{y^2}+\frac{5}{y^3}=\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{5}{(x-1)^3}$

$\therefore \frac{2x+3}{(x-1)^3}=\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{5}{(x-1)^3}$

5. $\frac{x^2-2x+6}{(x-2)^3}$

Sol: $x-2=y$ అనుకోండి అప్పుడు

$$\therefore \frac{x^2-2x+6}{(x-2)^3}=\frac{(y+2)^2-2(y+2)+6}{y^3}$$

$$=\frac{y^2+4y+4-2y-4+6}{y^3}$$

$$=\frac{y^2+2y+6}{y^3}$$

$$=\frac{1}{y}+\frac{2}{y^2}+\frac{6}{y^3}$$

$$=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{6}{(x-2)^3}$$

$$\therefore \frac{x^2-2x+6}{(x-2)^3}=\frac{1}{x-2}+\frac{2}{(x-2)^2}+\frac{6}{(x-2)^3}$$

6. $\frac{2x^2+3x+4}{(x-1)(x^2+2)}$

Sol. $\frac{2x^2+3x+4}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+2}$

$$2x^2+3x+4=A(x^2+2)+(Bx+C)(x-1)$$

$$x=1 \Rightarrow 2+3+4=A(1+2)$$

$$9=3A \Rightarrow A=3$$

x^2 పద గుణకాలను పోల్చగ

$$2 = A + B \Rightarrow B = 2 - A = 2 - 3 = -1$$

స్థిరాంకములను పోల్చగా

$$4 = 2A - C \Rightarrow C = 2A - 4 = 6 - 4 = 2$$

sakshieducation.com

$$\frac{2x^2+3x+4}{(x-1)(x^2+2)}=\frac{3}{x-1}+\frac{-x+2}{x^2+2}$$

7. $\dfrac{3x-1}{(1-x+x^2)(x+2)}$

Sol. Let $\dfrac{3x-1}{(1-x+x^2)(x+2)}=\dfrac{A}{2+x}+\dfrac{Bx+C}{1-x+x^2}$

$(2 + x)(1 – x + x^2)$ తో గుణించగా

$3x – 1 = A(1 – x + x^2)\ (Bx + C)(2 + x)$

$x = –2 \Rightarrow –7 = A(1+2+4) = 7A \Rightarrow A = –1$

x^2 పద గుణకాలను పోల్చగ

$0 = A + B \Rightarrow B = –A = 1$

స్థిరాంకములను పోల్చగా $–1 = A + 2C$

$2C = –1 – A = –1 + 1 = 0 \Rightarrow C = 0$

$$\frac{3x-1}{(1-x+x^2)(x+2)}=-\frac{1}{2+x}+\frac{x}{1-x+x^2}$$

8. $\dfrac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)}$

Sol. Let $\dfrac{x^2-3}{(x+2)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+2}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$

$(x + 2)(x^2 + 1)$ తో గుణించగా

sakshieducation.com

$x^2 - 3 = A(x^2 + 1) + (Bx + C)(x + 2)$

$x = -2 \Rightarrow 4 - 3 = A(4 + 1)$

$1 = 5A \Rightarrow A = \frac{1}{5}$

x^2 పద గుణకాలను పోల్చగ

$1 = A + B \Rightarrow B = 1 - A = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

స్థిరాంకములను పోల్చగా $-3 = A + 2C$

$2C = -3 - A = -3 - \frac{1}{5} = -\frac{16}{5} \Rightarrow C = -\frac{8}{5}$

$$\frac{x^2 - 3}{(x + 2)(x^2 + 1)} = \frac{1}{5(x + 2)} + \frac{4x - 8}{5(x^2 + 1)}$$

9. $\frac{x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2}$

Sol. Let $\frac{x^2 + 1}{(x^2 + x + 1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + x + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2 + x + 1)^2}$

$x^2 + 1 = (Ax + B)(x^2 + x + 1) + (Cx + D)$

x^3 పద గుణకాలను పోల్చగ

$A = 0$

x^2 పద గుణకాలను పోల్చగ

$A + B = 1 \Rightarrow B = 1$

x పద గుణకాలను పోల్చగ

$A + B + C = 0$

$\Rightarrow 1 + C = 0 \Rightarrow C = -1$

sakshieducation.com

స్థిరాంకములను పోల్చగా

$B + D = 1$

$\Rightarrow \quad D = 1 – B = 1 – 1 = 0$

$\therefore Ax + B = 1, Cx + D = –x$

$$\therefore \frac{x^2+1}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1}{x^2+x+1} - \frac{x}{(x^2+x+1)^2}$$

10. $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x-1)(x^3-1)}$

Sol. Let $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x-1)(x^3-1)} = \dfrac{x^3+x^2+1}{(x-1)(x-1)(x^2+x+1)}$

Let $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x-1)(x-1)(x^2+x+1)} =$

$$\frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1} \text{...(1)}$$

$$= \frac{A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}$$

$\therefore x^3+x^2+1 = A(x-1)(x^2+x+1)+B(x^2+x+1)+(Cx+D)(x-1)^2$...(2)

$x = 1$

$1+1+1 = A(0)+B(1+1+1)+(C(1)+D)(0)$

$\Rightarrow 3B = 3 \Rightarrow B = 1$

x^3 పద గుణకాలను పొల్చగ

$1 = A + C$ …(3)

x^2 పద గుణకాలను పొల్చగ

$1 = A(1 – 1) + B(1) + C(–2) + D(1)$

$\Rightarrow \quad 1 = B – 2C + D$

$\because B = 1 \Rightarrow 1 = 1 - 2C + D \Rightarrow 2C = D \qquad \ldots(4)$

x = 0 అయితే

$1 = A(-1)(1) + B(1) + D(-1)^2$

$\Rightarrow \quad -A + B + D = 1 \Rightarrow -A + 1 + D = 1$

$\Rightarrow \quad A = D \qquad \ldots(5)$

(3), (4) , (5) ల నుండి

$$1 = D + \frac{D}{2} \Rightarrow \frac{3D}{2} = 1 \Rightarrow D = \frac{2}{3}$$

(5) నుండి $A = \frac{2}{3}$,

(4) నుండి $C = \frac{D}{2} = \frac{(2/3)}{2} = \frac{1}{3}$

$$\therefore \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x-1)(x^3-1)} = \frac{(2/3)}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)}{x^2 + x + 1}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x-1)(x^3-1)} = \frac{2}{3(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{x+2}{3(x^2 + x + 1)}$$

11. $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)}$

Sol. Let $\dfrac{x^2}{(x-1)(x-2)} = 1 + \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2}$

(x – 1)(x – 2) తో గుణించగా

$x^2 = (x-1)(x-2) + A(x-2) + B(x-1)$

$x = 1,\ 1 = A(-1) \Rightarrow A = -1$

$x = 2,\ 4 = B(1) \Rightarrow B = 4$

$$\therefore \frac{x^2}{(x-1)(x-2)} = 1 - \frac{1}{x-1} + \frac{4}{x-2}$$

14. $\dfrac{x^3}{(x-1)(x+2)}$

Sol. $\dfrac{x^3}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{x^3}{x^2+x-2}$

$$= \frac{x(x^2+x-2)-1(x^2+x-2)+3x-2}{x^2+x-2}$$

$$= x-1+\frac{3x-2}{x^2+x-2} = x-1+\frac{3x-2}{(x-1)(x+2)}$$

Let $\dfrac{3x-2}{(x-1)(x+2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2}$

$(x - 1)(x + 2)$ నుండి

$3x - 2 = A(x + 2) + B(x - 1)$

$x = 1,\ 1 = A(3) \Rightarrow A = \dfrac{1}{3}$

$x = -2,\ -8 = B(-3) \Rightarrow B = \dfrac{8}{3}$

$$\therefore \frac{x^3}{(x-1)(x+2)} = x-1+\frac{1}{3(x-1)}+\frac{8}{3(x+2)}$$

sakshieducation.com

15. $\dfrac{x^3}{(2x-1)(x-1)^2}$

Sol.

$$\frac{x^3}{(2x-1)(x-1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

$2(2x – 1)(x – 1)^2$ తో గుణించగా

$$2x^3 = (2x-1)(x-1)^2 + 2A(x-1)^2 + 2B(2x-1)(x-1) + 2C(2x-1)$$

Put $x = \frac{1}{2}, 2\left(\frac{1}{8}\right) = 2A\left(\frac{1}{4}\right) \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Put x = 1, 2(1) = 2C(1) $\Rightarrow$ C = 1

Put x = 0,

0 = (–1)(1) + 2A(1) + 2B(–1)(–1) + 2C(–1)

$\Rightarrow$ 2A + 2B – 2C = 1

$\Rightarrow$ 2B = 1 + 2C – 2A = 1 + 2 – 1 = 2 $\Rightarrow$ B = 1

$$\therefore \frac{x^3}{(2x-1)(x-1)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2x-1)} + \frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x-1)^2}$$

16. $\dfrac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)}$

Sol. Let $\dfrac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 1 + \dfrac{A}{x-a} + \dfrac{B}{x-b} + \dfrac{C}{x-c}$

(x – a)(x – b)(x – c) తో గుణించగా

$$x^3 = (x-a)(x-b)(x-c) + A(x-b)(x-c) + B(x-a)(x-c) + C(x-a)(x-b)$$

$x = a,\ a^3 = A(a-b)(a-c)$

$$\Rightarrow A = \frac{a^3}{(a-b)(a-c)}$$

$x = b,\ b^3 = B(b-a)(b-c)$

$$\Rightarrow B = \frac{b^3}{(b-a)(b-c)}$$

$x = c,\ c^3 = C(c-a)(c-b)$

$$\Rightarrow C = \frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

$$\frac{x^3}{(x-a)(x-b)(x-c)} = 1 + \frac{a^3}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \frac{b^3}{(b-a)(b-c)(x-b)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)(x-c)}$$

17. $\frac{3x-18}{x^3(x+3)}$ **ను పాక్షిక భిన్నాలుగావిడగొట్టుము.**

Sol. Let $\frac{3x-18}{x^3(x+3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x+3}$

$$\therefore \frac{3x-18}{x^3(x+3)} = \frac{Ax^2(x+3) + Bx(x+3) + C(x+3) + Dx^3}{x^3(x+3)}$$

$\Rightarrow 3x-18 = Ax^2(x+3) + Bx(x+3) + C(x+3) + Dx^3$ ...(1)

$x = -3$

$3(-3) - 18 = A(0) + B(0) + C(0) + D(-3)^3$

$\Rightarrow -27D = -27 \Rightarrow D = 1$

$x = 0$

$3(0) - 18 = A(0) + B(0) + C(0 + 3) + D(0)$

$\Rightarrow 3C = -18 \Rightarrow C = -6$

x^3 పద గుణకాలను పోల్చగా

$0 = A + D \Rightarrow A = -D = -1 \Rightarrow A = -1$

x^2 పద గుణకాలను పోల్చగా

$0 = 3A + B \Rightarrow B = -3A = -3(-1) = 3 \Rightarrow B = 3$

$$\frac{3x-18}{x^3(x+3)} = \frac{-1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x+3}$$

18. $\frac{2x^2+1}{x^3-1}$ ను పాక్షిక భిన్నాలుగావిడగొట్టుము.

Sol. $\frac{2x^2+1}{x^3-1} = \frac{2x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)} \quad ...(1)$

$$\frac{2x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$\therefore 2x^2+1 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)...(1)$

$x = 1$

$2(1) + 1 = A(1 + 1 + 1) + (B + C)(0)$

$\Rightarrow 3A = 3 \Rightarrow A = 1$

$x = 0$ అయితే

$0 + 1 = A(1) + (0 + C)(0 - 1)$

$\Rightarrow 1 = A - C \Rightarrow C = 0$

x^2 పద గుణకాలను పోల్చగా

$2 = A + B \Rightarrow 2 = 1 + B \Rightarrow B = 1$

$$\therefore \frac{2x^2+1}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{(1)(x)+0}{x^2+x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2+x+1}$$

ఈ క్రింది వానిని పాక్షికభిన్నాలు గా విడగొట్టండి

1. $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)}$

Sol.Let $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+3}$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+3)+(Cx+D)(x^2+2)}{(x^2+2)(x^2+3)}$$

$$\therefore x^3+x^2+1 = (Ax+B)(x^2+3)+(Cx+D)(x^2+2) \quad ...(1)$$

$$\Rightarrow x^3+x^2+1 = (A+C)x^3+(B+D)x^2+(3A+2C)x+(3B+2D)$$

x^3, x^2, x పద గుణకాలను పోల్చగా

$A + C = 1, B + D = 1,$

$3A + 2C = 0, 3B + 2D = 1$

$\Rightarrow A = -2, C = 3, B = -1, D = 2$

$$\therefore \frac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)} = \frac{-2x-1}{x^2+2} + \frac{3x+2}{x^2+3}$$

$$= \frac{3x+2}{x^2+3} - \frac{2x+1}{x^2+2}$$

2. $\dfrac{3x^3-2x^2-1}{x^4+x^2+1}$.

Sol. $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2$

$=(x^2+1)^2-x^2=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

$$\frac{3x^3-2x^2-1}{x^4+x^2+1}=\frac{3x^3-2x^2-1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$$=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

$x^4 + x^2 + 1$ చే గుణించగా,

$3x^3 - 2x^2 - 1 = (Ax + B)(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x^2 + x + 1)$

సరి పద గుణకాల్ని పోల్చగా

$A + C = 3$ … (1)

$\Rightarrow C = 3 - A$

$-A + B + C + D = -2$ … (2)

$A - B + C + D = 0$ … (3)

$B + D = -1$ … (4) $D = -1-B$

(2) నుండి

$-A + B + 3 - A - 1 - B = -2$

$\Rightarrow -2A = -4 \Rightarrow A = 2$

(3) నుండి

$A - B + 3 - A - 1 - B = 0 \Rightarrow 2 = 2B \Rightarrow B = 1$

$\therefore C = 3 - 2 = 1, D = -1-1 = -2$

sakshieducation.com

$Ax + B = 2x + 1,\ Cx + D = x - 2$

$$\therefore \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{2x + 1}{x^2 + x + 1} + \frac{x - 2}{x^2 - x + 1}$$

3. $\dfrac{x^4 + 24x^2 + 28}{(x^2 + 1)^3}$

Sol. $\dfrac{x^4 + 24x^2 + 28}{(x^2 + 1)^3}$

$x^2 + 1 = y \Rightarrow x^2 = y - 1$

$$\frac{x^4 + 24x^2 + 28}{(x^2 + 1)^3} = \frac{(y-1)^2 + 24(y-1) + 28}{y^3}$$

$$= \frac{y^2 - 2y + 1 + 24y - 24 + 28}{y^3} = \frac{y^2 + 22y + 5}{y^3}$$

$$= \frac{y^2}{y^3} + \frac{22y}{y^3} + \frac{5}{y^3} = \frac{1}{y} + \frac{22}{y^2} + \frac{5}{y^3}$$

$$= \frac{1}{(x^2 + 1)} + \frac{22}{(x^2 + 1)^2} + \frac{5}{(x^2 + 1)^3}$$

$$\therefore \frac{x^4 + 24x^2 + 28}{(x^2 + 1)^3} = \frac{1}{(x^2 + 1)} + \frac{22}{(x^2 + 1)^2} + \frac{5}{(x^2 + 1)^3}$$

4. $\dfrac{x^3}{(2x - 1)(x + 2)(x - 3)}$

Sol. $\dfrac{x^3}{(2x - 1)(x + 2)(x - 3)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{A}{2x - 1} + \dfrac{B}{x + 2} + \dfrac{C}{x - 3}$

$2x^3 = (2x - 1)(x + 2)(x - 3) + 2A(x + 2)$

$(x - 3) + 2B(2x - 1)(x - 3) + 2C(2x - 1)(x + 2)$

$$x = \frac{1}{2}, 2\left(\frac{1}{8}\right) = 2A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow A = -\frac{1}{50}$$

$$x = -2,\ 2(-8) = 2B(-5)(-5) \Rightarrow B = \frac{-8}{25}$$

$$x = 3,\ 2(27) = 2C(5)(5) \Rightarrow C = \frac{27}{25}$$

$$\therefore \frac{x^3}{(2x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{50(2x-1)} - \frac{8}{25(x+2)} + \frac{27}{25(x-3)}$$

5. $\dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)}$.

Sol. $\dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x^4}{x^2-3x+2}$

$$= \frac{x^2(x^2-3x+2)+3x(x^2-3x+2)+7(x^2-3x+2)+15x-14}{x^2-3x+2}$$

$$= x^2+3x+7+\frac{15x-14}{x^2-3x+2}$$

$$\frac{15x-14}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

$$15x-14 = A(x-2)+B(x-1)$$

$$x = 1,\ 15 - 14 = A(-1) \Rightarrow A = -1$$

$$x = 2,\ 30 - 14 = B(1) \Rightarrow B = 16$$

$$\therefore \frac{x^4}{(x-1)(x-2)} = x^2+3x+7-\frac{1}{x-1}+\frac{16}{x-2}$$

6. $\frac{3x}{(x-2)(x+1)}$ విస్తరణ లో x^4 పద గుణకాన్ని కనుగొనుము.

Sol. $\frac{3x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$

$3x = A(x + 1) + B(x – 2)$

$x = –1, –3 = B(–3) \Rightarrow B = 1$

$x = 2, 6 = A(3) \Rightarrow A = 2$

$\therefore \frac{3x}{(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1}$

$= \frac{2}{-2\left(1-\frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{1+x} = -\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1} + (1+x)^{-1}$

$= -\left[1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{16}+...\right]+\left(1-x+x^2-x^3+x^4...\right)$

$\therefore$ x^4 పద గుణకం $= -\frac{1}{16}+1=\frac{15}{16}$

7. $\frac{x}{(x-1)^2(x-2)}$ విస్తరణ లో x^n పద గుణకాన్ని కనుగొనుము.

Sol. $\frac{x}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{x-2}$

$x = A(x – 1)(x – 2) + B(x – 2) + C(x – 1)^2$

$x = 1, 1 = B(–1) \Rightarrow B = –1$

$x = 2, 2 = C(1) \Rightarrow C = 2$

$x = 0, 0 = 2A – 2B + C \Rightarrow 2A = 2B – C$

$= –2 – 2 = –4 \Rightarrow A = –2$

$$\therefore \frac{x}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{-2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{2}{x-2}$$

$$= \frac{2}{1-x} - \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{-2\left(1-\frac{x}{2}\right)}$$

$$= 2(1-x)^{-1} - (1-x)^{-2} - \left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}$$

$$= 2[1+x+x^2+...+x^n+...] - [1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n+...]$$
$$-\left[1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}+...\frac{x^n}{2^n}+...\right]$$

$\therefore$ x^n పద గుణకం $= 2(1)-(n+1)-\left(\frac{1}{2^n}\right)$

$$= 2-n-1-\frac{1}{2^n} = 1-n-\frac{1}{2^n}.$$

8. $\dfrac{x+3}{(1-x)^2(1+x^2)}$.

Sol: $\dfrac{x+3}{(1-x)^2(1+x^2)} = \dfrac{A}{(1-x)} + \dfrac{B}{(1-x)^2} + \dfrac{Cx+D}{(1+x^2)}$

$$\Rightarrow x+3 = A(1-x)(1+x^2) + B(1+x^2) + (Cx+D)(1-x)^2$$

సరి పద గుణకాల్ని పోల్చగా

$A + B + D = 3$ ... (1)

$-A + C - 2D = 1$ ... (2)

$A + B - 2C + D = 0$ ... (3)

$-A + C = 0$ ... (4)

పై సమీకరణాల్ని సాధించగా

$$A = \frac{3}{2}, B = 2, C = \frac{3}{2}, D = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \frac{x+3}{(1-x)^2(1+x^2)} = \frac{3}{2(1-x)} + \frac{2}{(1-x)^2} + \frac{3x-1}{2(1+x^2)}$$

9. $\dfrac{x^2+5x+7}{(x-3)^3}$

Sol. x – 3 = y అనుకొనుము ⇒ x = y + 3

$$\frac{x^2+5x+7}{(x-3)^3} = \frac{(y+3)^2+5(y+3)+7}{y^3}$$

$$= \frac{y^2+6y+9+5y+15+7}{y^3}$$

$$= \frac{y^2+11y+31}{y^3} = \frac{1}{y} + \frac{11}{y^2} + \frac{31}{y^3}$$

$$\therefore \frac{x^2+5x+7}{(x-3)^3} = \frac{1}{x-3} + \frac{11}{(x-3)^2} + \frac{31}{(x-3)^3}$$

10. $\dfrac{x^2+13x+15}{(2x+3)(x+3)^2}$.

Sol. Let $\dfrac{x^2+13x+15}{(2x+3)(x+3)^2} = \dfrac{A}{2x+3} + \dfrac{B}{x+3} + \dfrac{C}{(x+3)^2}$

$$x^2+13x+15 = A(x+3)^2 + B(x+3)(2x+3) + C(2x+3)$$

$$\text{Put } x = -\frac{3}{2}, \frac{9}{4} - \frac{39}{2} + 15 = A\left(\frac{9}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{9A}{4} = \frac{9-78+60}{4} = -\frac{9}{4} \Rightarrow A = -1$$

x = –3, 9 – 39 + 15 = C(–3)

⇒ –3C = –15 ⇒ C = 5

sakshieducation.com

x^2 పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

$A + 2B = 1 \Rightarrow 2B = 1 - A = 1 + 1 = 2 \Rightarrow B = 1$

$$\therefore \frac{x^2+13x+15}{(2x+3)(x+3)^2} = \frac{-1}{2x+3} + \frac{1}{x+3} + \frac{5}{(x+3)^2}$$

11. $\dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)}$.

Sol.Let $\dfrac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{(x-1)^2} + \dfrac{C}{x-2}$

$$\Rightarrow \frac{1}{(x-1)^2(x-2)}$$

$$= \frac{A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)}$$

$\Rightarrow 1 = A(x-1)(x-2)+B(x-2)+C(x-1)^2 ...(1)$

$x = 1 \Rightarrow 1 = A(0) + B(1 - 2) + C(0)$

$\Rightarrow -B = 1 \Rightarrow B = -1$

Put $x = 2 \Rightarrow 1 = A(0) + B(0) + C(2 - 1)^2 \Rightarrow C = 1$

x^2 పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

$0 = A + C \Rightarrow A = -C = -1 \Rightarrow A = -1$

$$\therefore \frac{1}{(x-1)^2(x-2)} = \frac{-1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-2}$$

12. $\frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x-1)^2}$

Sol. Let $\frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$

$x^2 - x + 1 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1)$

$x = -1, 1 + 1 + 1 = A(4) \Rightarrow A = \frac{3}{4}$

$x = 1, 1 - 1 + 1 = C(2) \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

x^2 పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

$A + B = 1 \Rightarrow B = 1 - A = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

$\therefore \frac{x^2 - x + 1}{(x+1)(x-1)^2} = \frac{3}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^2}$

13. $\frac{9}{(x-1)(x+2)^2}$

Sol. $\frac{9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{(x+2)^2}$

$9 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)$

$x = 1 \Rightarrow 9 = 9A \Rightarrow A = 1$

$x = -2 \Rightarrow 9 = -3C \Rightarrow C = -3$

x^2 పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

$A + B = 0 \Rightarrow B = -A = -1$

$$\therefore \frac{9}{(x-1)(x+2)^2} = \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+2} - \frac{3}{(x+2)^2}$$

14. $\dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)^2}$

Sol. Let $\dfrac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{(x-2)^2}$

$\Rightarrow x - 1 =$

$A(x-2)^2 + B(x-2)(x+1) + C(x+1)$ …(1)

$x = 2$

$2 - 1 = A(0) + B(0) + C(2 + 1)$

$\Rightarrow 1 = 3C \Rightarrow C = \dfrac{1}{3}$

$x = -1 \quad \Rightarrow -1 - 1 = A(-1-2)^2 + B(0) + C(0)$

$\Rightarrow 9A = -2 \Rightarrow A = \dfrac{-2}{9}$

x^2 పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

$0 = A + B \Rightarrow B = -A = \dfrac{2}{9}$

$$\therefore \frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{\frac{-2}{9}}{x+1} + \frac{\frac{2}{9}}{x-2} + \frac{\frac{1}{3}}{(x-2)^2}$$

$$\frac{x-1}{(x+1)(x-2)^2} = \frac{-2}{9(x+1)} + \frac{2}{9(x-2)} + \frac{1}{3(x-2)^2}$$

15. $\dfrac{1}{(1-2x)^2(1-3x)}$

Sol. Let

$$\frac{1}{(1-2x)^2(1-3x)}=\frac{A}{1-3x}+\frac{B}{1-2x}+\frac{C}{(1-2x)^2}$$

$$1=A(1-2x)^2+B(1-3x)(1-2x)+C(1-3x)$$

$$x=\frac{1}{3}\Rightarrow 1=A\left(1-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{A}{9}\Rightarrow A=9$$

$$x=\frac{1}{2}\Rightarrow 1=C\left(1-\frac{3}{2}\right)=-\frac{C}{2}\Rightarrow C=-2$$

x^2 పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

0 = 4A + 6B

6B = –4A = –36

B = –6

$$\frac{1}{(1-2x)^2(1-3x)}=\frac{9}{1-3x}-\frac{6}{1-2x}-\frac{2}{(1-2x)^2}$$

16 $\dfrac{1}{x^3(x+a)}$

Sol. Let $\dfrac{1}{x^3(x+a)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x^3}+\dfrac{D}{x+a}$

$$=\frac{A\cdot x^2(x+a)+B(a)(x+a)+C(x+a)+Dx^3}{x^3(x+a)}$$

$$\therefore 1=A(x^2)(x+a)+Bx(x+a)+C(x+a)+Dx^3\ldots(1)$$

Put x = 0

$1 = A(0) + B(0) + C(0 + a) + D(0)$

$\Rightarrow 1 = C(a) \Rightarrow C = \frac{1}{a}$

Put $x = -a$

$1 = A(0) + B(0) + C(0) + D(-a)^3$

$\Rightarrow 1 = -Da^2 \Rightarrow D = -\frac{1}{a^3}$

x^3 పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

$0 = A + D$

$\Rightarrow A = -D = \frac{1}{a^3}, A = \frac{1}{a^3}$

x^2 పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

$0 = Aa + B$

$\Rightarrow B = -aA = -a\left(\frac{1}{a^3}\right) = -\frac{1}{a^2}$

$\therefore B = -\frac{1}{a^2}$

$$\frac{1}{x^3(x+a)} = \frac{\left(\frac{1}{a^3}\right)}{x} + \frac{\left(-\frac{1}{a^2}\right)}{x^2} + \frac{\left(\frac{1}{a}\right)}{x^3} + \frac{\left(-\frac{1}{a^3}\right)}{x+a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^3(x+a)} = \frac{1}{a^3x} - \frac{1}{a^2x^2} + \frac{1}{ax^3} - \frac{1}{a^3(x+a)}$$

17. $\dfrac{3x^3 - 8x^2 + 10}{(x-1)^4}$

Sol: x – 1 = y అనుకోండి

$$\therefore \frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{3(y+1)^3 - 8(y+1)^2 + 10}{y^4}$$

$$= \frac{3(y^3 + 3y^2 + 3y + 1) - 8(y^2 + 2y + 1) + 10}{y^4}$$

$$= \frac{3y^3 + y^2 - 7y + 5}{y^4}$$

$$= \frac{3}{y} + \frac{1}{y^2} - \frac{7}{y^3} + \frac{5}{y^4}$$

$$= \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{7}{(x-1)^3} + \frac{5}{(x-1)^4}$$

$$\therefore \frac{3x^3 - 8x^2 + 10}{(x-1)^4}$$

$$= \frac{3}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{7}{(x-1)^3} + \frac{5}{(x-1)^4}$$

18. $\dfrac{3x - 18}{x^3(x+3)}$.

Sol. Let $\dfrac{3x-18}{x^3(x+3)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x^2} + \dfrac{C}{x^3} + \dfrac{D}{x+3}$

$$\therefore \frac{3x-18}{x^3(x+3)} = \frac{Ax^2(x+3) + Bx(x+3) + C(x+3) + Dx^3}{x^3(x+3)}$$

$\Rightarrow 3x - 18 = Ax^2(x+3) + Bx(x+3) + C(x+3) + Dx^3$ ...(1)

x = –3

3(–3) – 18 = A(0) + B(0) + C(0) + D(–3)^3

$\Rightarrow -27D = -27 \Rightarrow D = 1$

$x = 0$

$3(0) - 18 = A(0) + B(0) + C(0 + 3) + D(0)$

$\Rightarrow 3C = -18 \Rightarrow C = -6$

x^3 పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

$0 = A + D \Rightarrow A = -D = -1 \Rightarrow A = -1$

x^2 పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

$0 = 3A + B \Rightarrow B = -3A = -3(-1) = 3 \Rightarrow B = 3$

$$\frac{3x-18}{x^3(x+3)} = \frac{-1}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^3} + \frac{1}{x+3}$$

19. $\dfrac{2x^2+1}{x^3-1}$.

Sol. $\dfrac{2x^2+1}{x^3-1} = \dfrac{2x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)}$ ...(1)

$$\frac{2x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

$$\Rightarrow \frac{2x^2+1}{(x-1)(x^2+x+1)} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$\therefore 2x^2+1 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)$...(1)

$x = 1$

$2(1) + 1 = A(1 + 1 + 1) + (B + C)(0)$

$\Rightarrow 3A = 3 \Rightarrow A = 1$

$x = 0$

$0 + 1 = A(1) + (0 + C)(0 – 1)$

$\Rightarrow 1 = A – C \Rightarrow C = 0$

x^2 పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

$2 = A + B \Rightarrow 2 = 1 + B \Rightarrow B = 1$

$$\therefore \frac{2x^2+1}{x^3-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{(1)(x)+0}{x^2+x+1} = \frac{1}{x-1} + \frac{x}{x^2+x+1}$$

20. $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)}$.

Sol. Let $\dfrac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+3}$

$$= \frac{(Ax+B)(x^2+3)+(Cx+D)(x^2+2)}{(x^2+2)(x^2+3)}$$

$\therefore x^3+x^2+1=$

$(Ax+B)(x^2+3)+(Cx+D)(x^2+2)$ ...(1)

$\Rightarrow x^3+x^2+1=(A+C)x^3+(B+D)x^2+(3A+2C)x+(3B+2D)$

x^3, x^2, x ,స్థిర పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

$A + C = 1, B + D = 1,$

$3A + 2C = 0, 3B + 2D = 1$

$A = –2, C = 3, B = –1, D = 2$

$$\therefore \frac{x^3+x^2+1}{(x^2+2)(x^2+3)} = \frac{-2x-1}{x^2+2} + \frac{3x+2}{x^2+3}$$

$$= \frac{3x+2}{x^2+3} - \frac{2x+1}{x^2+2}$$

21. $\frac{3x^3-2x^2-1}{x^4+x^2+1}$.

Sol. $x^4+x^2+1 = x^4+2x^2+1-x^2$

$$= (x^2+1)^2 - x^2 = (x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

$$\frac{3x^3-2x^2-1}{x^4+x^2+1} = \frac{3x^3-2x^2-1}{(x^2+x+1)(x^2-x+1)}$$

$$= \frac{Ax+B}{x^2+x+1} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1}$$

$3x^3 - 2x^2 - 1 = (Ax + B)(x^2 - x + 1) + (Cx + D)(x^2 + x + 1)$

ఇరువైపులా సరి పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

$A + C = 3$ … (1)

$\Rightarrow C = 3 - A$

$-A + B + C + D = -2$ … (2)

$A - B + C + D = 0$ … (3)

$B + D = -1$ … (4) $D = -1-B$

(2)నుండి

$-A + B + 3 - A - 1 - B = -2$

$\Rightarrow -2A = -4 \Rightarrow A = 2$

(3)నుండి

$A - B + 3 - A - 1 - B = 0 \Rightarrow 2 = 2B \Rightarrow B = 1$

$\therefore\ C = 3 - 2 = 1,\ D = -1-1 = -2$

$Ax + B = 2x + 1,\ Cx + D = x - 2$

$$\therefore \frac{3x^3 - 2x^2 - 1}{x^4 + x^2 + 1} = \frac{2x+1}{x^2 + x + 1} + \frac{x-2}{x^2 - x + 1}$$

22. $\dfrac{x^3}{(2x-1)(x+2)(x-3)}$ **.**

Sol. $\dfrac{x^3}{(2x-1)(x+2)(x-3)} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{A}{2x-1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{x-3}$

$2x^3 = (2x-1)(x+2)(x-3) + 2A(x+2)$
$(x-3) + 2B(2x-1)(x-3) + 2C(2x-1)(x+2)$

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{1}{8}\right) = 2A\left(\frac{5}{2}\right)\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow A = -\frac{1}{50}$$

$$x = -2 \ \Rightarrow\ 2(-8) = 2B(-5)(-5) \Rightarrow B = \frac{-8}{25}$$

$$x = 3 \ \Rightarrow 2(27) = 2C(5)(5) \Rightarrow C = \frac{27}{25}$$

$$\therefore \frac{x^3}{(2x-1)(x+2)(x-3)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{50(2x-1)} - \frac{8}{25(x+2)} + \frac{27}{25(x-3)}$$

23. $\dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)}$ **.**

Sol. $\dfrac{x^4}{(x-1)(x-2)} = \dfrac{x^4}{x^2 - 3x + 2}$

$$= \frac{x^2(x^2 - 3x + 2) + 3x(x^2 - 3x + 2) + 7(x^2 - 3x + 2) + 15x - 14}{x^2 - 3x + 2}$$

$$= x^2 + 3x + 7 + \frac{15x - 14}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\frac{15x - 14}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$15x - 14 = A(x-2) + B(x-1)$$

$$x = 1 \Rightarrow 15 - 14 = A(-1) \Rightarrow A = -1$$

$$x = 2 \Rightarrow 30 - 14 = B(1) \Rightarrow B = 16$$

$$\therefore \frac{x^4}{(x-1)(x-2)} = x^2 + 3x + 7 - \frac{1}{x-1} + \frac{16}{x-2}$$

24. $\frac{3x}{(x-2)(x+1)}$ **విస్తరణ లో x^4 పద గుణకాన్ని కనుగొనుము.**

Sol. $\frac{3x}{(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1}$

$$3x = A(x+1) + B(x-2)$$

$$x = -1, -3 = B(-3) \Rightarrow B = 1$$

$$x = 2, 6 = A(3) \Rightarrow A = 2$$

$$\therefore \frac{3x}{(x-2)(x+1)} = \frac{2}{x-2} + \frac{1}{x+1}$$

$$= \frac{2}{-2\left(1 - \frac{x}{2}\right)} + \frac{1}{1+x} = -\left(1 - \frac{x}{2}\right)^{-1} + (1+x)^{-1}$$

$$= -\left[1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16} + \ldots\right] + \left(1 - x + x^2 - x^3 + x^4 \ldots\right)$$

$\therefore$ **x^4 పద గుణకం** $= -\frac{1}{16} + 1 = \frac{15}{16}$

25. $\dfrac{x}{(x-1)^2(x-2)}$ **విస్తరణ లో x^n పద గుణకాన్ని కనుగొనుము.**

Sol. $\dfrac{x}{(x-1)^2(x-2)}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}+\dfrac{C}{x-2}$

$x = A(x – 1)(x – 2) + B(x – 2) + C(x – 1)^2$

$x = 1, 1 = B(–1) \Rightarrow B = –1$

$x = 2, 2 = C(1) \Rightarrow C = 2$

$x = 0, 0 = 2A – 2B + C \Rightarrow 2A = 2B – C$

$= –2 – 2 = –4 \Rightarrow A = –2$

$\therefore \dfrac{x}{(x-1)^2(x-2)}=\dfrac{-2}{x-1}-\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{2}{x-2}$

$=\dfrac{2}{1-x}-\dfrac{1}{(1-x)^2}+\dfrac{2}{-2\left(1-\dfrac{x}{2}\right)}$

$=2(1-x)^{-1}-(1-x)^{-2}-\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^{-1}$

$=2[1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots]-[1+2x+3x^2+\ldots+(n+1)x^n+\ldots]-\left[1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^2}{4}+\ldots\dfrac{x^n}{2^n}+\ldots\right]$

$\therefore$ **x^n పద గుణకం** $= 2(1)-(n+1)-\left(\dfrac{1}{2^n}\right)$

$=2-n-1-\dfrac{1}{2^n}=1-n-\dfrac{1}{2^n}$.

26. $\frac{5x+6}{(2+x)(1-x)}$ విస్తరణ లో x^3 పద గుణకాన్ని కనుగొనుము

Sol. Let $\frac{5x+6}{(2+x)(1-x)} = \frac{A}{2+x} + \frac{B}{1-x}$

$5x + 6 = A(1 - x) + B(2 + x)$

$x = 1 \Rightarrow 11 = B(2+1) = 3B \Rightarrow B = \frac{11}{3}$

$x = -2 \Rightarrow -4 = A(1+2) = 3A \Rightarrow A = \frac{-4}{3}$

$\frac{5x+6}{(2+x)(1-x)} = \frac{-4}{3(2+x)} + \frac{11}{3(1-x)}$

$= \frac{-4}{3\cdot 2\left(1+\frac{x}{2}\right)} + \frac{11}{3(1-x)}$

$= -\frac{2}{3}\left(1+\frac{x}{2}\right)^{-1} + \frac{11}{3}(1-x)^{-1}$

$= -\frac{2}{3}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \ldots\right) + \frac{11}{3}\left(1 + x + x^2 + x^3 \ldots\right)$

$\therefore$ x^3 పద గుణకం $= -\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{11}{3}(1)$

$= \frac{2+88}{24} = \frac{90}{24} = \frac{15}{4}$

27. $\frac{3x^2+2x}{(x^2+2)(x-3)}$ విస్తరణ లో x^4 పద గుణకాన్ని కనుగొనుము..

Sol.Let $\frac{3x^2+2x}{(x^2+2)(x-3)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+2}$

$3x^2 + 2x = A(x^2+2) + (Bx+C)(x-3)$

$x = 3 \Rightarrow 27 + 6 = A(9+2)$

$33 = 11A \Rightarrow A = 3$

x^2 పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

$3 = A + B \Rightarrow B = 3 - A = 3 - 3 = 0$

స్థిర పదాల్ని పోల్చగా,

$2A - 3C = 0 \Rightarrow 3C = 2A = 6 \Rightarrow C = 2$

$$\frac{3x^2 + 2x}{(x^2+2)(x-3)} = \frac{3}{x-3} + \frac{2}{x^2+2}$$

$$= \frac{3}{-3\left(1-\frac{x}{3}\right)} + \frac{2}{2\left(1+\frac{x^2}{2}\right)}$$

$$= -\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1} + \left(1+\frac{x^2}{2}\right)^{-1}$$

$$= -\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}+\frac{x^3}{27}+\frac{x^4}{81}+\dots\right)+\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\dots\right)$$

$\therefore$ **x^4** పద గుణకం $= -\frac{1}{81} + \frac{1}{4}$

$$= \frac{-4+81}{324} = \frac{77}{324}$$

28. $\frac{x-4}{x^2-5x+6}$ **విస్తరణ లో x^n పద గుణకాన్ని కనుగొనుము.**

Sol. Let $\frac{x-4}{x^2-5x+6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$

$x - 4 = A(x-3) + B(x-2)$

$x = 2 \Rightarrow -2 = A(2-3) = -A \Rightarrow A = 2$

$x = 3 \Rightarrow -1 = B(3-2) = B \Rightarrow B = -1$

$$\frac{x-4}{x^2-5x+6}=\frac{2}{x-2}-\frac{1}{x-3}$$

$$=\frac{2}{-2\left(1-\frac{x}{2}\right)}+\frac{1}{3\left(1-\frac{x}{3}\right)}$$

$$=-\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}+\frac{1}{3}\left(1-\frac{x}{3}\right)^{-1}$$

$$=-\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+...+\frac{x^n}{2^n}+...\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{x}{3}+\frac{x^2}{9}+...+\frac{x^n}{3^n}+...\right)$$

x^n పద గుణకం $=\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{2^n}$

29. $\frac{3x}{(x-1)(x-2)^2}$ విస్తరణ లో x^n పద గుణకాన్ని కనుగొనుము.

Sol: Let

$$\frac{3x}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{(x-2)^2}$$

$$\Rightarrow A(x-2)^2+B(x-1)(x-2)+C(x-1)=3x$$

$x = 1 \Rightarrow A = 3$

$x = 2 \Rightarrow C = 6$

x^2 పద గుణకాల్ని పోల్చగా,

$A + B = 0 \Rightarrow B = -A \Rightarrow B = -3$

$$\therefore \frac{3x}{(x-1)(x-2)^2}=\frac{3}{x-1}-\frac{3}{x-2}+\frac{6}{(x-2)^2}$$

$$=-3(1-x)^{-1}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}+\frac{3}{2}\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}$$

Now

$$(1-x)^{-1}=1+x+x^2+...+x^n+...,|x|<1$$

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-1}=1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\ ,\ \left|\frac{x}{2}\right|<1$$

i.e. $|x| < 2$

$$\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}=1+2\left(\frac{x}{2}\right)+3\left(\frac{x}{2}\right)^2+4\left(\frac{x}{2}\right)^3+\ldots+(n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ldots\left|\frac{x}{2}\right|<1 \text{ i.e., } |x| < 2.$$

$|x| < 1.$

$$\therefore \frac{3x}{(x-1)(x-2)^2}=-3\left(1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots\right)+\left(1+\frac{x}{2}+\frac{x^2}{4}+\ldots+\frac{x^n}{2^n}+\ldots\right)$$

$$+\frac{3}{2}\left(1+2\left(\frac{x}{2}\right)+3\left(\frac{x}{2}\right)^2+..+(n+1)\left(\frac{x}{2}\right)^n+\ldots\right)$$

x^n పద గుణకం= $-3+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2^n}\right)+\frac{3}{2}\frac{(n+1)}{2^n}$

$$=-3+\frac{3}{2^{n+1}}+\frac{3(n+1)}{2^{n+1}}.$$

త్రి పరిమాణ నిరూపకాలు

1. $P(3,-2,4)$ బిందువుకు మూలబిందువు నుంచి దూరాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. $OP = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{9+4+16}$

$= \sqrt{29}$ యూనిట్లు

2. $(3,4,-2),(1,0,7)$ బిందువుల మధ్యదూరం కనుక్కోండి.

సాధన. $PQ = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$

$= \sqrt{(3-1)^2+(4-0)^2+(-2-7)^2}$

$= \sqrt{4+16+81} = \sqrt{101}$ యూనిట్లు

3. $(5,-1,7),(x,5,1)$ ల మధ్యదూరం 9 యూనిట్లు అయితే x ను కనుక్కోండి.

సాధన. $P(5,-1,7), Q(x,5,1)$ లు బిందువులు

$PQ = 9$

$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2} = 9$

$\sqrt{(5-x)^2+(-1-5)^2+(7-1)^2} = 9$

$(5-x)^2+36+36 = 81$

$(5-x)^2 = 81-72 = 9$

$5-x = \pm 3$

$5-x=3$ లేదా $5-x=-3$

$x=5-3$ లేదా $x=5+3$

$=2$ లేదా 8

4. $(2,3,5),(-1,5,-1),(4,-3,2)$ బిందువులు సమద్విబాహు లంబకోణ త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.

సాధన. $A(2,3,5), B(-1,5,-1), C(4,-3,2)$ లు దత్త బిందువులు

$AB^2 = (2+1)^2+(3-5)^2+(5+1)^2$

$= 9+4+36 = 49$

$BC^2 = (-1-4)^2+(5+3)^2+(-1-2)^2$

$= 25+64+9 = 98$

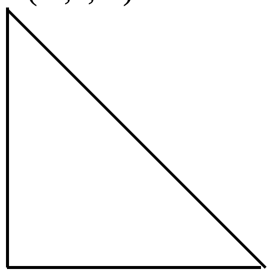
www.sakshieducation.com

$CA^2 = (4-2)^2 + (-3-3)^2 + (2-5)^2$

$= 4+36+9 = 49$

$AB^2 = CA^2 \Rightarrow AB^2 + CA^2 = 49 = 49 = 98 = BC^2$

ABC లంబకోణ సమద్విబాహు త్రిభుజం



5. $(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$ బిందువులు ఒక సమబాహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయని చూపండి.

సాధన. $A(1,2,3), B(2,3,1)$ మరియు $C(3,1,2)$లు దత్త బిందువులు

$AB^2 = (1-2)^2 + (2-3)^2 + (3-1)^2$

$= 1+1+4 = 6$

$BC^2 = (2-3)^2 + (3-1)^2 + (1-2)^2$

$= 1+4+1 = 6$

$AB^2 = BC^2 = CA^2 \Rightarrow AB = BC = CA$

ABC సమబాహు త్రిభుజము

6. $A = (-2,2,3), B = (13,-3,13)$లు రెండు బిందువులు. 3PA=2PB అయ్యేటట్లు చలించే బిందువు P యొక్కనిరూపకాలు $x^2 + y^2 + z^2 + 28x - 12y + 10z - 247 = 0$ సమీకరణాన్ని తృప్తిపరుస్తాయని చూపండి.

సాధన. $A(-2,2,3)$ మరియు $B(13,-3,13)$లు దత్త బిందువులు $P(x,y,z)$బిందువు బిందుపథం మీది దత్త నియమము

$3PA = 2PB \Rightarrow 9PA^2 = 4PB^2$

$9\left[(x+2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2\right]$

$= 4\left[(x-13)^2 + (y+3)^2 + (z-13)^2\right]$

$\Rightarrow 9\left(x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9\right)$

$= 4\left(x^2 - 26x + 169 + y^2 + 6y + 9 + z^2 - 26z + 169\right)$

www.sakshieducation.com

$9x^2+9y^2+9z^2+36x-36x-36y-54z+153$

$=4x^2+4y^2+4z^2-104x+24y-104z+1388$

$5x^2+5y^2+5z^2+140x-60y+50-1235=0$

5 తో భాగించగా P బిందు పథము

$x^2+y^2+z^2+28x-12y+10z-247=0$

7. $(1,2,3)(7,0,1),(-2,3,4)$ సరేఖీయాలు అని చూపండి.

సాధన. $A(1,2,3), B(7,0,1)C(-2,3,4)$ దత్త బిందువులు

$AB=\sqrt{(1-7)^2+(2-0)^2+(3-1)^2}=$

$\sqrt{36+4+4}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}$

$BC=\sqrt{(7+2)^2+(0-3)^2+(1-4)^2}=$

$\sqrt{81+9+9}=\sqrt{99}=3\sqrt{11}$

$CA=\sqrt{(-2,-1)^2+(3-2)^2+(4-3)^2}=$

$\sqrt{9+1+1}=\sqrt{11}$

$AB+AC=2\sqrt{11}=3\sqrt{11}=BC$

A,B,C లు సరేఖీయాలు

8. $A(-2,3,4), B(1,2,3)$ **బిందువులను కలపే రేఖాఖండాన్ని XZ-తలం విభజించే నిష్పత్తిని కనుక్కోండి.**

సాధన. AB ని XZ - తలం విభజించే నిష్పత్తి

$AB=-y_1:y_2$

$=-3:2$

9. $A(1,1,1), B(-2,4,1)$ బిందువులురెండుశీర్షాలుగా, మూలబిందువు కేంద్రాసంగాగల త్రిభుజం ABC కి శీర్షం 'C' నిరూపకాలు కనుక్కోండి.

సాధన. $A(1,1,1), B(-2,4,1)$ లు (x,y,z)బిందువు ΔABC యొక్కశీర్షాలు

G బిందువు ΔABC కేంద్రాభాసం

G నిరూపకాలు

$$\left(\frac{1-2+x}{3},\frac{1+4+y}{3},\frac{1+1+z}{3}\right)=(0,0,0)$$

$$\frac{x-1}{3}=0,\frac{y+5}{3}=0,\frac{z+2}{3}=0$$

$x-1=0, y+5=0, z+2=0$

www.sakshieducation.com

$x=1, y=-5, z=-2$

$\therefore$ C నిరూపకాలు $(1,-5,-2)$

10. $(3,2,-1),(4,1,1),(6,2,5)$లు మూడు శీర్షాలుగా, $(4,2,2)$ కేంద్రాభాసంగా గల చతుర్ముఖి నాలగో శీర్షాన్నికనుక్కోండి.

సాధన: $A(3,2,-1), B(4,1,1), C(6,2,5), D(x,y,z)$లు

చతుర్భుజ శీర్షాలు

కేంద్రభాసం G నిరూపకాలు

$$\left(\frac{3+4+6+x}{4},\frac{2+1+2+y}{4},\frac{-1+1+5+z}{4}\right)$$

$$=\left(\frac{13+x}{4},\frac{5+y}{2},\frac{5+z}{4}\right)=(4,2,2)$$

$$\frac{13+x}{4}=4 \qquad \frac{5+y}{4}=2 \qquad \frac{5+z}{4}=2$$

$$13+x=16 \qquad 5+y=8 \qquad \frac{5+z}{4}=2$$

$$x=16-13=3 \qquad y=8-5=3 \qquad z=8-5=3$$

D నిరూపకాలు $(3,3,3)$

11. $A=(6,3,-4), B=(-2,-1,2)$లను కలిపే రేఖా ఖండం మధ్యబిందువుకూ, $(3,-1,2)$బిందువుకూ మధ్య గల దూరాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. $A(6,3,-4)B(-2,-1,2)$లు దత్త బిందువులు

AB మధ్య బిందువు Q

Q నిరూపకాలు $\left(\frac{6-2}{2},\frac{3-1}{2},\frac{-4+2}{2}\right)$

$=2(2,1,-1)$

P నిరూపకాలు $(3,-1,2)$

$$PQ=\sqrt{(3-2)^2+(1-1)^2+(2+1)^2}$$

$=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$ యూనిట్లు

www.sakshieducation.com

12. $A(3,2,-4), B(5,4-6) C(9,8,-10)$లు సరేఖీయాలు అని చూపి, B, $\overline{AC}$ ని విభజించే నిష్పత్తిని కనుక్కోండి.

సాధన.

$A(3,2,-4) B(5,4,-6)$ మరియు $C(9,8,-10)$లు

దత్తబిందువులు

$AB = \sqrt{(3-5)^2 + (2-4)^2 + (-4+6)^2}$

$= \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$BC = \sqrt{(5-9)^2 + (4-8)^2 + (-6+10)^2}$

$= \sqrt{16+16+16} = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$

$CA = \sqrt{(9-3)^2 + (8-2)^2 + (-10+4)^2}$

$= \sqrt{36+36+36} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

$AB + BC = 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 6\sqrt{3} = CA$

A,B,C సరేఖీయాలు

AC ని B విభజించే నిష్పత్తి = AB:BC

$= 2\sqrt{3} : 4\sqrt{3} = 1:2$

13. $O(0,0,0), A(2,-3,3), B(-2,3,-3)$ బిందువులు సరేఖీయాలని చూపండి. ప్రతిబిందువూ మిగిలిన రెడు బిందువులను కలపే రేఖను ఏ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందో కనుక్కోండి.

సాధన.

$O(0,0,0), A(2,-3,3), B(-2,3,-3)$లు దత్త బిందువులు

$OA = \sqrt{(0-2)^2 + (0+3)^2 + (0-3)^2}$

$= \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$

$OB = \sqrt{(0+2)^2 + (0-3)^2 + (0+3)^2}$

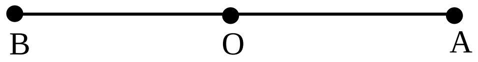
$= \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$

$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (-3-3)^2 + (3+3)^2}$

$= \sqrt{16+36+36} = \sqrt{88} = 2\sqrt{22}$

$OA + OB = \sqrt{22} + \sqrt{22} = 2\sqrt{22} = AB$

$\therefore$ O,A,B సరేఖీయాలు



AB ని 'O' విభజించే నిష్పత్తి

$= OA : AB = \sqrt{22} : \sqrt{22} = -1:2$

www.sakshieducation.com

OA ని B విభజించే నిష్పత్తి

$= -AB : BO = -2\sqrt{22} : \sqrt{22} = -2:1$

14) Y – అక్షం నుంచి ఒక బిందువు దూరం, $(1,2,-1)$ నుంచిదానికి దూరానికి మూడు రెట్లయితే ఆ బిందువు బిందుపథం $8x^2 + 9y^2 + 8z^2 - 18x - 36y + 18z + 54 = 0$ అని చూపండి.

సాధన.

$P(x, y, z)$ బిందుపథము మీది బిందువు

$PM = Y -$ అక్షం నుండి దూరము $= \sqrt{x^2 + z^2}$

$A(1,2,-1)$ దత్త బిందువు

దత్త నియమము $PM = 3, PA$

$PM^2 = 9PA^2$

$x^2 + z^2 = \left[9(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2\right]$

$= 9x^2 - 18x + 9 + 9y^2 - 36y + 36$

$+9z^2 + 18z + 9$

P బిందవులు $8x^2 + 9y^2 + 8z^2 - 18x - 36y$

$+18z + 54 = 0$

P తృప్తి పరిచే సమీకరణము

$8x^2 + 6y^2 + 8z^2 - 18x - 36y + 18z + 54 = 0$

15. $A(2,4,5), B(3,5,-4)$ లను కలపే సరళరేఖా ఖండాన్ని YZ - తలం విభజించే నిష్పత్తిని మరియు ఖండన బిందువును కనుక్కోండి.

సాధన.

AB రేఖ YZ తలాన్ని P వద్ద ఖండిస్తుంది.

P బిందువు AB ని k:1 నిష్పత్తి లో విభజిస్తుంది.

P నిరూపకాలు

$\left(\frac{3k+2}{1}, \frac{5k+4}{k+1}, \frac{-4k+5}{k+1}\right)$

P బిందువు YZ తలం పై ఉంది.

$\Rightarrow$ p యొక్క x నిరూపకాలు= 0

$\frac{3k+2}{k+1} = 0 \Rightarrow 3k + 2 = 0$

$k = -\frac{2}{3}$

www.sakshieducation.com

YZ తలం AB ని -2:3 నిష్పత్తిలో విభజిస్తుంది.

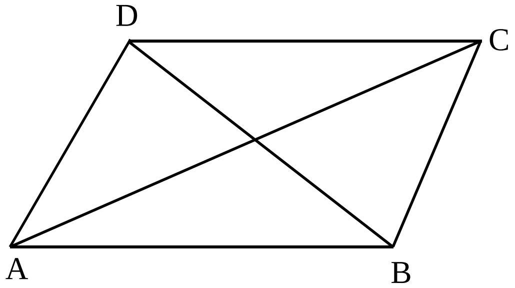
k విలువ p నిరూపకాలతో ప్రతిక్షేపించగా

$$p\left[0,\frac{5\left(-\frac{2}{3}\right)+4}{-\frac{2}{3}+1},\frac{(-4)\left(-\frac{2}{3}\right)+5}{-\frac{2}{3}+1}\right]$$

$(0,2,23)$

16. $(2,4,-1),(3,6,-1),(4,5,1)$ వరుస శీర్షాలుగా గల సమాంతర చతుర్భుజం యొక్క నాలుగో శీర్షాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన.



ABCD సమాంతర చతుర్భుజం

$A=(2,4,-1), B=(3,6,-1)$

$C=(4,5,1)$

$D(x,y,z)$ నాల్గవ శీర్షం

ABCD సమాంతర చతుర్భుజం

AC మధ్య బిందువు =BD మధ్య బిందువు

$$\left(\frac{2+4}{2},\frac{4+5}{7},\frac{-1+1}{2}\right)=\left(\frac{3+x}{2},\frac{6+y}{2},\frac{-1+z}{2}\right)$$

$$\frac{3+x}{2}=\frac{6}{2} \qquad \frac{6+y}{2}=\frac{9}{2} \qquad \frac{0}{2}=\frac{z-1}{2}$$

$$3+x=6 \qquad 6+y=9 \qquad z-1=0$$

$$x=3 \qquad y=3 \qquad z=1$$

$\therefore$ నాల్గవ శీర్షం నిరూపకాలు $=D(3,3,1)$

www.sakshieducation.com

17. $(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2)$ బిందువులతో ఏర్పడిన త్రిభుజం లంబకేంద్రం, కేంద్రభాసం, పరికేంద్రం, అంతరకేంద్రాలు వరుసగా H,G,S,I లు అయితే వాటివిలువలను కనుక్కోండి.

సాధన.

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(1-3)^2}$$

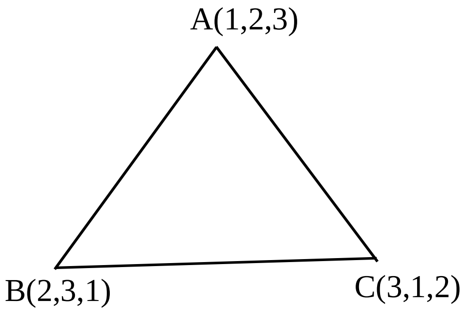
$$=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

$$BC=\sqrt{(3-2)^2+(1-3)^2+(2-1)^2}$$

$$=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}$$

$$CA=\sqrt{(1-3)^2+(2-1)^2+(3-2)^2}$$

$$=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$



$AB=BC=CA$ కాబట్టి, ABC సమబాహు త్రిభుజం.

కేంద్ర భాసం $G=\left(\frac{1+2+3}{3},\frac{2+3+1}{3},\frac{3+1+2}{3}\right)=(2,2,2)$

సమబాహు త్రభుజంలో లంబకేంద్రం, కేంద్రభాసం,పరికేంద్రం, అంతరకేంద్రాలు సమానం (నాలుగు బిందువులు ఏకీభవిస్తాయి).

$H=(2,2,2), S=(2,2,2), I=(2,2,2)$

www.sakshieducation.com

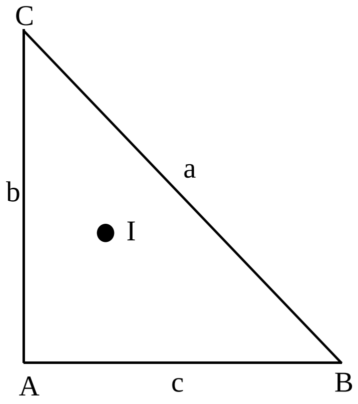
18. $(0,0,0),(3,0,0),(0,4,0)$లతో ఏర్పడిన త్రిభుజం అంతరకేంద్రం కనుక్కోండి.

సాధన.

$A=(x_1,y_1,z_1), B=(x_2,y_2,z_2), C=(x_3,y_3,z_3)$

లు శీర్షాలుగా గల ABC త్రిభుజం భుజాలు a,b,c

అయితే త్రిభుజం అంతరకేంద్రం



$$I=\left(\frac{ax_1+bx_2+cx_3}{a+b+c},\frac{ay_1+by_2+cy_3}{a+b+c},\frac{az_1+bz_2+cz_3}{a+b+c}\right)$$

$A=(0,0,0), B=(3,0,0), C=(0,4,0)$

$a=BC=\sqrt{9+16+0}=5;$

$b=CA=\sqrt{0+16+0}=4;$

$c=AB=\sqrt{9+0+0}=3$

కాబట్టి $I=\left(\frac{5(0)+4(3)+3(0)}{5+4+3},\frac{5(0)+4(0)+3(4)}{5+4+3}\right.$

$$\left.\frac{5(0)+4(0)+3(0)}{5+4+3}\right)$$

$=(1,1,0)$

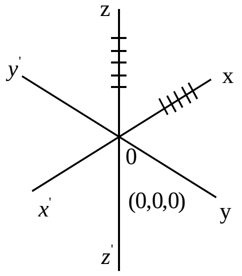
www.sakshieducation.com

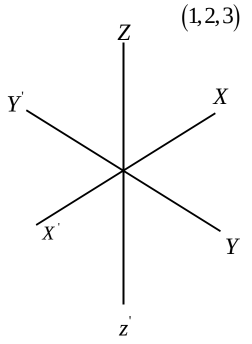
19. సమాంతర అక్షపరివర్తనం ద్వారా $(1,2,3)$ బిందువును $(2,3,1)$ బిందువు వద్దకు మారిస్తే, నూతన మూల బిందువును కనుక్కోండి.

సాధన. $Oxyz$ నిరూపక వ్యవస్థ దృష్ట్యా P బిందువును నిరూపకాలు (x,y,z) అనుకొందాం $O'XYZ$ నిరూపక వ్యవస్థ దృష్ట్యా P బిందువు నిరూపకాలు (X,Y,Z) అనుకొందాం

$P(x,y,z) \rightarrow (X,Y,Z)$

$(1,2,3) \rightarrow (2,3,1)$





$O'(h,k,s)$ నూతన మూలబిందువు అయితే

$x = X + h, y = Y + k, z = Z + s$ అవుతాయి

$\Rightarrow (h,k,s)(x-X, y-Y, z-Z)$

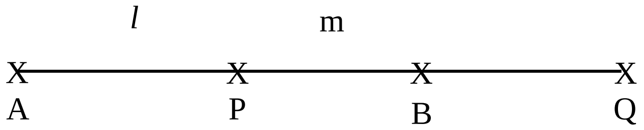
$\Rightarrow (h,k,s) = (1-2, 2-3, 3-1)$

$= (-1,-1,2)$

$\therefore\ O' = (-1,-1,2)$ నూతన మూలబిందువు

20. $A(3,2,-4), B(9,8,-10)$ బిందువులను కలిపే రేఖాఖండాన్ని $P(5,4,-6)$ బిందువు విభజించే నిష్పత్తి కనుక్కోండి. ఇంకా P హరాత్మక సంయుగ్మ బిందువును కూడా కనుక్కోండి.

సాధన.



AB రేఖా ఖండాన్ని P బిందువు విభజించే నిష్పత్తి $l:m$

$\therefore (5,4-6)$

$= \left(\frac{9l-3m}{l-m}, \frac{8l-2m}{l-m}, \frac{10l+4m}{l-m}\right)$

AB ని Q బిందువు $l:-m$ నిష్పత్తిలో విభజిస్తుందనుకుందాం. అప్పుడు

www.sakshieducation.com

$$=\left(\frac{9l-6l}{l-2l},\frac{8l-4l}{l-2l},\frac{-10l+8l}{l-2l}\right)$$

$$=(-3,-4,2)$$

$\therefore$ $P(5,4,-6)$ హరాత్మక సంయుగ్మ బిందువు $Q(-3,-4,2)$

www.sakshieducation.com

సంభావ్యత

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. **పరస్పర వివర్జిత, పూర్ణఘటనలకు రెండు ఉదాహరణలను ఇవ్వండి**

జ: i) ఒక పాచికను దొర్లించే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో శాంపిల్ ఆవరణ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E_1 =$ పాచికను దొర్లించినపుడు బేసి అంకె రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_1 = \{1, 3, 5\}$

$E_2 =$ పాచికను దొర్లించినపుడు సరి అంకె రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_2 = \{2, 4, 6\}$ అయిన

$\Rightarrow E_1 \cup E_2 = S,\ E_1 \cap E_2 = \phi$

$\therefore E_1, E_2$ లు పరస్పర వివర్జిత, పూర్ణ ఘటనలు

ii) రెండు నాణేలను ఒకేసారి దొర్లంచే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో శాంపిల్ ఆవరణ

$S = \{HH, HT, TH, TT\}$

ఇచ్చట $H =$ బొమ్మను, $T =$ అచ్చును సూచిస్తుంది

$E_1 =$ రెండు నాణేలను ఒకేసారి దొర్లించినపుడు కనీసం అచ్చులు కావటం అనే ఘటన

$\therefore E_1 = \{HH, HT, TH\}$

$E_2 =$ రెండు నాణేలను ఒకేసారి దొర్లించినపుడు రెండు అచ్చులు కావటం అనే ఘటన

$\therefore E_2 == \{TT\}$

ఇచ్చట $E_1 \cup E_2 = S,\ E_2 \cap E_2 = \phi$

$\therefore E_1, E_2$ పరస్పర వివర్జిత, పూర్ణ ఘటనలు

2. **పరస్పర వివర్జిత ఘటనగానీ, పూర్ణఘటనగానీ కానట్టి ఘటనలకు రెండు ఉదాహరణలను ఇవ్వండి**

జ: i) ఒక పాచికను దొర్లించే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో శాంపిల్ ఆవరణ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E_1 =$ సరి ప్రధాన అంకె రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_1 = \{2\}$

$E_2 =$ సరి అంకె రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_2 = \{2, 4, 6\}$

ఇచ్చట

$E_1 \cap E_2 = \{2\},\ E_1 \cup E_2 = \{2, 4, 6\}$

కాబట్టి E_1, E_2 లు రెండు పరస్పర వివర్జితం గానీ, పూర్ణ ఘటనలు గానీ కానటువంటి ఘటనలు

www.sakshieducation.com

$ii)$ రెండు నాణేలను ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు, శాంపిల్ ఆవరణ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

ఇచ్చట $H =$ బొమ్మను, $T =$ అచ్చును సూచిస్తుంది.

$E_1 =$ ఒక బొమ్మ రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_1 = \{HT, TH\}$

$E_2 =$ కనీసం ఒక బొమ్మ రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_2 = \{HH, HT, TH\}$

ఇచ్చట $E_1 \cap E_2 = \{HT, TH\}$

$E_1 \cup E_2 = \{HH, HT, TH\}$

$\therefore E_1, E_2$ లు రెండు పరస్పర వివర్జితం గానీ, పూర్ణ ఘటనలు గానీ కానటువంటి ఘటనలు

3. సమ సంభవంగానీ, పూర్ణ ఘటనగానీ కానట్టి ఘటనలకు రెండు ఉదాహరణలను ఇవ్వండి

జ: $i)$ రెండు నాణేలను ఎగురవేసే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో శాంపిల్ ఆవరణ $S = \{HH, HT, TH, TT\}$

$E_1 =$ ఒక అచ్చు రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_1 = \{HT, TH\}$

$E_2 =$ కనీసం ఒక అచ్చు రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_2 = \{HT, TH, TT\}$

$P(E_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ మరియు $P(E_2) = \frac{3}{4}$

$\therefore E_1, E_2$ లు సమసంభవాలు కాని ఘటనలు

$[\because P(E_1) \neq P(E_2)]$

$E_1 \cup E_2 = \{HT, TH, TT\}$

$\therefore E_1, E_2$ పూర్ణ ఘటనలు కావు

$ii)$ పాచికను దొర్లించే యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో శాంపిల్ ఆవరణ $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$E_1 =$ బేసి ప్రధాన సంఖ్య రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_1 = \{3, 5\}$

$E_2 =$ బేసి సంఖ్య రావటం అనే ఘటన

$\therefore E_2 = \{1, 3, 5\}$

$P(E_1) = \frac{2}{6}, P(E_2) = \frac{3}{6}$

$\therefore E_1, E_2$ లు సమసంభవాలు కాని ఘటనలు

$[\because P(E_1) \neq P(E_2)]$

$E_1 \cup E_2 = \{1, 3, 5\}$

$\therefore E_1, E_2$ లు పూర్ణ ఘటనలు కావు

www.sakshieducation.com

4. నాలుగు నిష్పాక్షిక నాణేలను ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు 2 బొమ్మలు, 2 బొరుసులు పడే సంభావ్యతను కనుక్కోండి

జ: నాలుగు నిష్పాక్షిక నాణేలను ఒకేసారి ఎగురవేసినప్పుడు $n(S)=2^4=16$

$E=$ రెండు బొమ్మలు, రెండు బొరుసులు రావటం అనే ఘటన

$$\therefore n(E)={}^4C_2=\frac{4\times3\times2\times1}{2\times1\times2\times1}=6$$

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}$$

5. ఒక పేక ముక్కల కట్ట నుంచి యాదృచ్ఛికంగా ఒక పేక ముక్కను తీసే ప్రయోగంలో ఇస్పేటు ముక్కను తీసే ఘటనను A తోను, బొమ్మను కలిగిన కార్డును (రాజు, రాణి లేదా జాకీ) తీసే ఘటనను B తోను సూచిద్దాం. అప్పుడు $A, B, (A\cap B), (A\cup B)$ ల సంభావ్యతను కనుక్కోండి

జ: చీట్ల పేక కట్ట నుంచి యాదృచ్ఛికంగా ఒక పేకముక్కను తీయగా, $n(S)=52$

i) A అనేది తీసిన పేకముక్క ఇస్పేటు కావటం అనే ఘటన

$\Rightarrow n(A)=13$

$$\therefore P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$$

ii) B అనేది బొమ్మను కలిగిన కార్డు తీసే ఘటన

$\Rightarrow n(B)=12$

$$\therefore P(A)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{12}{52}=\frac{3}{13}$$

iii) $A\cap B$ అనేది తీసిన కార్డు బొమ్మను కలిగిన ఇస్పేటు కార్డు కావటం అనే ఘటన

$\Rightarrow n(A\cap B)=3$

$$\therefore P(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{3}{52}$$

సంకలన సిద్ధాంతము నుంచి

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

$$=\frac{13}{52}+\frac{12}{52}-\frac{3}{52}=\frac{22}{52}=\frac{11}{26}$$

www.sakshieducation.com

6. **A, B, C లు ఒక పట్టణం నుంచి వెలువడే వార్తా పత్రికలు. ఆ పట్టణ జనాభలో 20% A ని, 16% B ని, 14% C ని, 8% A, B రెండింటిని, 5% A, C రెండింటిని, 4% B, C, రెండింటిని, 2% మూడింటినీ చదువుతారు. కనీసం ఒక వార్తాపత్రికను చదివే జనాభా శాతాన్ని కనుక్కోండి**

జ: $P(A) = \frac{20}{100}, \; P(B) = \frac{16}{100}, \; P(C) = \frac{14}{100}$

$P(A \cap B) = \frac{8}{100}, \; P(A \cap C) = \frac{5}{100},$

$P(B \cap C) = \frac{4}{100}, \; P(A \cap B \cap C) = \frac{2}{100}$

$\therefore$ కనీసం ఒక వార్తాపత్రిక చదివే జనాభా శాతం

$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$

$-P(A \cap B) - P(B \cap C)$

$-P(C \cap A) + P(A \cap B \cap C)$

$= \frac{20}{100} + \frac{16}{100} + \frac{14}{100} - \frac{8}{100} - \frac{4}{100} - \frac{5}{100} + \frac{2}{100}$

$= \frac{35}{100} = 35\%$

$\therefore$ 35% మంది కనీసం ఒక వార్తాపత్రిక చదువుతారు.

7. **ఒక నాణాన్ని మూడుసార్లు ఎగరవేయడం, వచ్చిన ఫలితాన్ని రాయడం ఒక క్రీడ. అన్ని ఎగరవేతలలోనూ ఒకే ఫలితం వస్తే ఒక బాలుడు గెలిచినట్లు, అట్లాకాకపోతే ఓడినట్లు భావిస్తారు. ఆ బాలుడు క్రీడలో ఓడిపోయే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.**

జ: ఒక నాణేన్ని 3 సార్లు ఎగురవేస్తే $n(S) = 2^3 = 8$

$\therefore n(E) = 2$

అన్ని ఎగరవేలలోనూ ఒకే ఫలితం వస్తే, అంటే అన్నీ బొమ్మలు లేదా అన్నీ అచ్చులు వస్తే బాలుడు గెలిచినట్లుగా భావిస్తారు. కనుక బాలుడు గెలిచే ఘటన E అయితే

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{2}{8}$

$\therefore$ ఆ బాలుడు క్రీడలో ఓడిపోయే సంభావ్యత

$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$

$= 1 - \frac{2}{8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

www.sakshieducation.com

8. $E_1 \cap E_2 = \phi$ **తో** E_1, E_2 **లు రెండు ఘటనలు. అప్పుడు** $P\left(E_1^c \cap E_2^c\right) = P\left(E_1^c\right) - P\left(E_2^c\right)$ **అని చూపండి.**

జ: $P\left(E_1^c \cap E_2^c\right) = P\left[\left(E_1 \cup E_2\right)^c\right]$

$= 1 - \left[P\left(E_1 \cup E_2\right)\right]$

$= 1 - \left[P\left(E_1\right) + P\left(E_2\right)\right]$

$\left[\because P\left(E_1 \cap E_2\right) = P(\phi) = 0\right]$

($\because$ సంకలన సిద్ధాంతం నుంచి)

$= 1 - P(E_1) - P(E_2)$

$= P\left(E_1^c\right) - P\left(E_2\right)$

9. రెండు పాచికలను దొర్లించారు. ఏ పాచిక 2 ను చూపని సందర్భానికి సంభావ్యత ఎంత?

సాధన. రెండు పాచికలను దొర్లించారు. కనుక $n(S) = 6^2 = 36$

E అనేది ఏ పాచిక 2 చూపని ఘటన

$n(E) = 5 \times 5 = 25$

$P(E) = \dfrac{n(E)}{n(S)} = \dfrac{25}{36}$

10. 60 బాలురు, 20 బాలికలు గల తరగతిలో సగం మంది బాలురు, సగం మంది బాలికలు క్రికెట్‌పై అవగాహన కలిగినవారు. ఈ తరగతి నుంచి ఒక విద్యార్థిని ఎంపిక చేసినప్పుడు, బాలుడు లేదా క్రికెట్ తెలిసిన వ్యక్తి అయ్యేఘటనకు సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. ఎంపిక చేసినవాడు బాలుడు అయ్యే ఘటన A, ఎంపిక చేసినవారు క్రికెట్ తెలిసిన వ్యక్తి అయ్యే ఘటన B అనుకుందాం.

$n(S) = {}^{(60+60)}C_1 = 80$

$n(A) = 60, n(B) = (30+10) = 40$

$(A \cap B)$ సగం మంది క్రికెట్ తెలిసిన బాలుడు కావటం అనే ఘటన అవుతుంది.

$(A \cap B) = 30$ (సగం మంది బాలురకు క్రికెట్‌పై అవగాహన ఉంది)

$P(A) = \dfrac{60}{80}, P(B) = \dfrac{40}{80}, P(A \cap B) = \dfrac{30}{80}$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \dfrac{60}{80} + \dfrac{40}{80} - \dfrac{30}{80} = \dfrac{70}{80}$

www.sakshieducation.com

$= \frac{7}{8}$

11. **రెండు ఘటనలు A, B లకు $P(A^C \cap B^C) = 1 + P(A \cap B) - P(A) - P(B)$ అని చూపండి.**

సాధన. $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C$ కనుక

$P(A^C \cap B^C) = P\left[(A \cup B)^C\right]$

$= 1 - P(A \cup B)$

$= 1 - \left[P(A) + P(B) - P(A \cap B)\right]$

$= 1 + P(A \cap B) - P(A) - P(B)$

$P(A^C \cap B^C) = 1 + P(A \cap B) - P(A) - P(B)$

12. **ఒక నిష్పాక్షిక నాణేన్ని 200 సార్లు ఎగరవేశారు. బేసి సంఖ్యలో (అన్నిసార్లు) బొమ్మపడే సంభావ్యత కనుక్కోండి.**

సాధన. మొత్తం ఫలితాల సంఖ్య 2^{200}

బేసి సంఖ్యలో బొమ్మపడే ఘటలనను E అనుకొందాం

E కి అనుకూల ఫలితాల సంఖ్య

$= {}^{200}C_1 + {}^{200}C_3 + {}^{200}C_5 + \dots + {}^{200}C_{199}$

$= 2^{200} \div 2 = 2^{199}$

కాబట్టి కావసిన సంభావ్యత $P(E) = \frac{2^{191}}{2^{200}} = \frac{1}{2}.$

13. **యాదృచ్ఛికంగా ఒకగుండ్రని బల్లచుట్టూ కూర్చున్న 20 మంది వ్యక్తులలో A, B లు ఉన్నారు. A, B ల మధ్య ఎవరైనా ఆరుగురు వ్యక్తులుండే సంభావ్యత కనుక్కోండి.**

సాధన. గుండ్రటి బల్లచూట్టూ ఏ లిసనం పైనైనా 'A' కూర్చోవచ్చు. అప్పుడు B కి అందుబాటులో ఉన్న ఆసనాల సంఖ్య 19. కాని A, B ల మధ్య ఆరుగురు వ్యక్తులు ఉండాలంటే B కి గల అవకాశాలు రెండే. కాబట్టి కావలసిన సంభావ్యత $\frac{2}{19}$

www.sakshieducation.com

14. రెండు పాచికలతో మొత్తం స్కోరు 7 దొర్లించే సంభావ్యత ఎంత?

సాధన. ఇచ్చిన ప్రయోగం శాంపులే ఆవరణం

$$S = \{(1,1),(1,2),....,(1,6),$$

$$(2,1),(2,2),.....(2,6),$$

$$(6,1,(6,2),......,(6,6)\}$$

ఏదైనా ఒక మూలకంలోని మొదటి నిరూపకం మొదటి పాచికపై స్కోరును, రెండు నిరూపకం రెండో పాచికపై స్కోరును సూచిస్తాయి. S లో మొత్తం 36 మూలకాలున్నాయి. S లోని మూలకాలన్నీ సమసంభవాలు.

మొత్తం స్కోరు 7 పొందే ఘటనను E అనుకోండి. అప్పుడు

$E = \{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

లో మొత్తం 6 మూలకాలున్నాయి

$$P(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

15.**9. బాగా కలిపిన 52 పేకముక్కలకట్ట నుంచిఒక ముక్కను తీస్తే అది ఆసు గాని, ఇస్పేటు గాని అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?**

గమనిక. పేక ముక్కలకట్ట అంటే 52 కార్డులు ఉన్న పేక ముక్కల కట్ట అని అర్థం. అందులో 26 ఎర్రనివి, 26 నల్లనివి. ఈ 52 కార్డులను నాలుగు సెట్లుగా విభజిస్తూ విటీని ఆఠీను, కళావరు, డైమండ్, స్పేడ్ (ఇస్పేటు) అనే పేర్లతో పిలుస్తారు. ప్రతి సెట్‌లోనూ 13 కార్డులుంటాయి. అవి

$A, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, K, Q, J$

($A =$ ఆసు, $K =$ రాజు, $Q =$ రాణీ, $J =$ జాకీ)

సాధన. తీసిన ముక్క ఇస్పేటు అయ్యేఘటన E_1, ఆసు అయ్యేఘటన E_2, అనుకోండి. E_1, E_2 లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు కావని గమనించండి. $P(E_1 \cup E_2)$ ని కనుక్కోవాలి.

ఇక్కడ $n(E_1) = 13, n(E_2) = 4, n(E_1 \cap E_2) = 1$

$$\therefore P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$$

$$= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}.$$

www.sakshieducation.com

16. A, B లు ఐఐటి లో ప్రవేశం కోరుకుంటున్నారు. A ఎంపిక కాగల సంభావ్యత 0.5, ఇద్దరూ ఎంపిక కాగల సంభావ్యత 0.3 అయితే, B ఎంపిక కాగల సంభావ్యత 0.9 అయ్యే అవకాశం ఉందా?

జ: దత్తాంశం నుంచి $P(A) = 0.5;\ P(A \cap B) = 0.3$

మరియు $P(A \cup B) \le 1$

$\Rightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \le 1$

$\Rightarrow 0.5 + P(B) - 0.3 \le 1$

$\Rightarrow P(B) \le 1 - 0.2 = 0.8$

$\therefore P(B) = 0.9$ కావటం అసాధ్యం

17. 25 మంది సభ్యులు గల ఒక కమిటీలో ప్రతి సభ్యుడు గణితంలో గాని, సాంఖ్యక శాస్త్రంలోగాని లేదా రెండింటిలో గాని ప్రవీణులై ఉంటారు. వీరిలో 19 మంది గణితంలోను, 16 మంది సాంఖ్యక శాస్త్రంలోను ప్రవీణులైతే, కమిటీ నుంచి ఎంపిక చేసిన ఒక సభ్యుడు రెండింటిలోను ప్రవీణుడై ఉండే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జ: ఎన్నుకున్న వ్యక్తి గణితంలో ప్రవీణుడయ్యే ఘటన $= M$ సాంఖ్యకశాస్త్ర ప్రవీణుడయ్యే ఘటన $= S$ అనుకొనుము.

$n(S) = 25;\ n(A) = 19;\ n(B) = 16$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \frac{19}{25} + \frac{16}{25} - 1 = \frac{35-25}{25} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$

$\therefore$ ఎన్నుకొన్న వ్యక్తి రెండు శాస్త్రాల్లోనూ ప్రవీణుడయ్యే ఘటన సంభావ్యత $= \frac{2}{5}$

18 **రెండు నిష్పాక్షిక పాచికలను దొర్లించారు. ఆ పాచికల ముఖాలపై గల సంఖ్యల మొత్తం 10 అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?**

సాధన. రెండు పాచికలను దొర్లిస్తే

$n(S) = (6)^2 = 36$

పాచికల ముఖాలపై గల సంఖ్యమొత్తం 10 అయ్యేఘటన E అనుకుంటే

$E = \{(4,6),(5,5),(6,4)\}$

$n(E) = 3$

$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

www.sakshieducation.com

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $\{1, 2, 3, ...100\}$ **నుంచి ఒక సంఖ్య** x**ను యాదృచ్ఛికంగా తీయడంజరిగింది** $\left(x+\frac{100}{x}\right) > 29$ **అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?**

సాధన. ఇక్కట మొత్తం ఫలితాలసంఖ్య 100

$\{1, 2, 3, ...100\}$ లో నుంచి ఎన్నుకొన్న సంఖ్య x అనేది

$x+\frac{100}{x} > 29$ ని ధ్రువపరిచే ఘటనను A అనుకొందాం.

అప్పుడు $x+\frac{100}{x} > 29$

$\Leftrightarrow x^2 - 29x + 100 > 0$

$\Leftrightarrow (x-4)(x-25) > 0$

$\Leftrightarrow x > 25 \quad x < 4$

$\Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3, 26, 27, ...100\} = A$

(అనుకొందా)

కాబట్టి A అనుకూల ఫలితాలసంఖ్య 78

కాబట్టి కావసిన సంభావ్యత

$= P(A) = \frac{78}{100} = 0.78$

2. **ఒక చదరంగం బల్లపై రెండు చతురస్రాలను యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొన్నారు. వాటికి ఉమ్మడి ఉండటానికి గల సంభావ్యత** $\frac{1}{18}$ **అని చూపండి.**

సాధన. మొదటి చతురస్రాన్ని 64 విధాలుగా, రెండోదాన్ని 63 విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు. కాబట్టి రెండు చతురస్రాలను ఎన్నుకొనే విధాలు 64×63

ఈ చతురస్రాలు ఒక ఉమ్మడి భుజాన్ని కలిగిఉండే ఘటన E అనుకొందాం.

ఇప్పుడు E అనుకూల ఫలితాల సంఖ్యను కనుక్కోందా.

మొదటగా ఎన్నుకొన్న చతురస్రం మూలనున్న నాలుగు చతురస్రాల్లో ఒకటి అయితే రెండురెండో చతురస్రాన్ని (ఉమ్మడి భుజం ఉండేటట్లు) రెండు రకాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు.

www.sakshieducation.com

మొదటిగా ఎన్నుకొన్న చతురస్రం చదరంగం బల్ల భుజం వెంబడి గల (మూలల వద్ద ఉన్న వాటిని మినహాయిస్తే) 24 చదరాల్లో ఒకటి అయితే, రెండో చతురస్రాన్ని 3 విధాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు.

మొదటిగా ఎన్నుకొన్న చతురస్రం మిగిలిన 36 చతురస్రాల్లో ఒకటి అయితే రెండోదాన్ని 4 విదాలుగా ఎన్నుకోవచ్చు.

కాబట్టి అనుకూల ఫలితాల సంఖ్య

$(4\times 2)+(24\times 3)+(36\times 4)=224$

కాబట్టి కావలసిన సంభావ్యత $=\dfrac{224}{64\times 63}=\dfrac{1}{18}$.

3. ఒక సంచిలో 12 రెండు రూపాయినాణేలు, 7 రూపాయినాణేలు, 4 అర్థరూపాయి నాణేలు ఉన్నాయి. ఆ సంచి నుంచి యాదృచ్ఛికంగా మూడు నాణేలను ఎంపిక చేస్తే, *i)* **మూడు నాణేల మొత్తం గరిష్ఠం కావడానికి,**

ii) **మూడు నాణేల మొత్తం కనిష్ఠం కావడానికి,**

iii) **మూడు నాణేలు వేర్వేరు విలువలను కలిగి ఉండడానికి గల సంభావ్యతలను కనుక్కోండి**

జ: సంచిలోని నాణేల సంఖ్య = 12 + 7 + 4 = 23

యాదృచ్ఛికంగా 3 నాణేలను ఎన్నుకునే విధాల సంఖ్య $n(S)={}^{23}C_3$

i) $E_1 =$ ఎన్నుకున్న 3 నాణేల మొత్తం గరిష్ఠం కావటం అనే ఘటన అంటే 3 రెండు రూపాయి నాణేలు కావాలి

$\therefore n(E_1)={}^{12}C_3,\ P(E_1)=\dfrac{n(E_1)}{n(S)}=\dfrac{{}^{12}C_3}{{}^{23}C_3}$

ii) $E_2 =$ఎన్నుకున్న 3 నాణేల మొత్తం కనిష్ఠం కావటం అనే ఘటన అంటే 3 నాణేలు అర్థ రూపాయి నాణనేలు కావాలి

$\therefore n(E_2)={}^{4}C_3, P(E_2)=\dfrac{n(E_2)}{n(S)}=\dfrac{{}^{4}C_3}{{}^{23}C_3}$

iii) $E_3 =$ ఒక్కొక్కటి ఒక్కో రకం నాణేం కావటం అనే ఘటన

$n(E_3)={}^{12}C_1\times{}^{7}C_1\times{}^{4}C_1=12\times 7\times 4$

$P(E_3)=\dfrac{n(E_3)}{n(S)}=\dfrac{12\times 7\times 4}{{}^{23}C_3}$

www.sakshieducation.com

4. **మూడు ఘటనలు A, B, C ల సంభావ్యతలు కింది విధంగా ఉన్నాయి.** $P(A)=0.3$, $P(B)=0.4$, $P(C)=0.8$, $P(A\cap B)=0.08$,

$P(A\cap C)=0.28$, $P(A\cap B\cap C)=0.09$, $P(A\cup B\cup C)\geq 0.75$. $P(B\cap C)$

$P(A\cup B\cup C)\geq 0.75$

$\therefore 0.75\leq P(A\cup B\cup C)\leq 1$

$\Rightarrow 0.75\leq P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)$

$-P(B\cap C)-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)\leq 1$

$\Rightarrow 0.75\leq 0.3+0.4+0.8-0.08-P(B\cap C)$

$-0.28+0.09\leq 1$

$\Rightarrow 0.75\leq 1.23P(B\cap C)\leq 1$

$\Rightarrow -1.23+0.75\leq -P(B\cap C)\leq 1-1.23$

$\Rightarrow -0.48\leq -P(B\cap C)\leq -0.23$

$\Rightarrow 0.23\leq P(B\cap C)\leq 0.48$

$\Rightarrow P(B\cap C)\in[0.23, 0.48]$

5. **లీపు సంవత్సరం కాని సందర్భంలో** (i) 53 **ఆదివారాలు** (ii) 52 **ఆదివారాలు మాత్రమే వచ్చే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.**

సాధన. లీపు సంత్సరం కాని $(i.e.,)$ సాధారణ సంవత్సరంలో 365 రోజులుంటాయి. అంటే 52 వారాలు పోగా, ఒకరోజు మిగులుతుంది. ఆ ఒక్కరోజు ఆది లేక సోమ లేక మంగళలేక బుధ లేక గురు లేక శుక్ర శనివారం కావచ్చు.

కనుక శాంపిల్ ఆవరణ

$S=\{$ఆది, సోమ, మంగళ, బుధ, గురు, శుక్ర, శని$\}$

$n(S)=7$

(i) E అనేది సాధారణ సంవత్సరంలో 53 ఆదివారాలు ఉండే ఘటన

$n(E)=1$

$$P(E)=\frac{n(E)}{n(S)}=\frac{1}{7}$$

(ii) ఇక 52 ఆదివారాలు మాత్రమే ఉండే ఘటన సంభావ్యత $P(E^C)=1-P(E)$

$$=1-\frac{1}{7}=\frac{6}{7}$$

www.sakshieducation.com

6. **ముందుగా 3ను దొర్లించిన వాళ్ళు ఆట గెలిచినట్లు అనే షరతుపై A, B అనే ఇద్దరు వ్యక్తులు రెండు పాచికలను దొర్లించారు. ఆటను ముందుగా A మొదలుపెడితే, A, Bలు వరుసగా ఆట గెలిచే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.**

సాధన. పాచికను దొర్లించినపుడు 3 చుక్కలున్న ముఖం తిరగబడుటకు సంభావ్యత $p = \frac{1}{6}$

$(i.e.,)$ సంఫల సంభావ్యత $p = \frac{1}{6}$

విఫల సంభావ్యత $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

A గెలిచే ఘటన జరగాలంటే

1. మొదటి యత్నంలోనే A గెలవాలి (ఈ ఘటన సంభావ్యత p) లేదా

2. మొదటి రెండు యత్నాలలో A, B లు ఓడిపోయి, తరువాత యత్నంలో A గెలవాలి.

ఈ ఘటన సంభావ్యత $= q.q.p = q^2 p$ లేదా

3. మొదటి నాలుగు యత్నాలలో A, B లు ఓడిపోయి ఆ తరువాత యత్నంలో A గెలవాలి.

ఈ ఘటన సంభావ్యత $= q.q.q.q.p = q^4 p......$

ఈ విధంగా A పాచికలపై 3 చుక్కలు వచ్చేవరకు ఆట కొనసాగుతుంది.

పై ఘటనలన్నీ పరస్పర వివర్జితాలు.

సంకలన సిద్ధాంతం నుంచి A గెలుపు సంభావ్యత

$$P(A) = p + q^2 p + q^4 p + ...$$

$$= p\left[1 + q^2 + q^4 + ...\right]$$

$$= p\left(\frac{1}{1-q^2}\right) = \frac{p}{1-q^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1}{6}\right)}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^2} = \frac{1}{6} \times \frac{36}{11} = \frac{6}{11}$$

B గెలుపు సంభావ్యత

$$= 1 - P(A) = 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$$

www.sakshieducation.com

7. **1 నుంచి 30 వరకు సంఖ్యలను వేసిన 30 టిక్కెట్ల నుంచి యాదృచ్ఛికంగా ఒక టిక్కెట్‌ను ఎంపికచేస్తే, ఆ టిక్కెట్‌పై గల సంఖ్య**

(i) ***5 లేదా 7 గుణిజం***

(ii) ***3 లేదా 5 గుణిజం***

కా గల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. 1 నుండి 30 వరకు అంకెలున్న 30 టిక్కెట్ల నుండి యాదృచిఛకంగా ఒక టిక్కెట్ ఎన్నుకునే విధాల సంఖ్య

$n(S) = {}^{30}C_1 = 30$

(i) E_1 అనేది ఆ అంకె 5 యొక్క గుణిజం కావటం అనే ఘటన

$E_1 = \{5, 10, 15, 20, 25, 30\}$

$n(E_1) = 6$

$$p(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$$

E_2 అనేది ఆ అంకె 7 యొక్క గుణిజం కావటం అనే ఘటన

$E_2 = \{7, 14, 21, 28\}$

$n(E_2) = 4$

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{4}{30}$$

$E_1 \cap E_2 = \phi$

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$$= \frac{6}{30} + \frac{4}{30} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$$

(ii) E_1 అనేది అంకె 3 యొక్క గుణిజం కావటం అనే ఘటన

$E_1 = \{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30\}$

$n(E_1) = 10$

$$P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{10}{30}$$

E_2 అనేది అంకె 5 యొక్క గుణిజం కావటం అనే ఘటన

$E_2 = \{5, 10, 14, 20, 25, 30\}$

$n(E_2) = 6$

www.sakshieducation.com

$$P(E_2)=\frac{n(E_2)}{n(S)}=\frac{6}{30}$$

$$E_1 \cap E_2 = \{15,30\}$$

$$n(E_1 \cap E_2)=2 \Rightarrow P(E_1 \cap E_2)=\frac{2}{30}$$

$$P(E_1 \cup E_2)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1 \cap E_2)$$

$$=\frac{10}{30}+\frac{6}{30}-\frac{2}{30}$$

$$=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$$

8. 20 వరస సహజ సంఖ్యల నుంచి రెండు సంఖ్యలను యాదృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేస్తే, ఆ రెండు సంఖ్యల మొత్తం

(i) ఒక సరిసంఖ్యకావడానికి

(ii) ఒక బేసి సంఖ్యకావడానికి సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. 20 వరస సంఖ్యల నుంచి 2 సంఖ్యలను ఎంపిక చేసే విధానాలు

$$n(S)={}^{20}C_2=\frac{20\times 19}{1\times 2}=190$$

వీటిలో 10 బేసిసంఖ్యలు, 10 సరిసంఖ్యలు

(i) E అనేది ఎంపిక చేసిన రెండు సంఖ్యల మొత్తం సరి సంఖ్యకావాలి అనే ఘటన రెండు బేసి సంఖ్యల మొత్తం సరి సంఖ్య అవుతుంది, లేదా రెండు సరి సంఖ్య మొత్తంసరి సంఖ్యఅవుతుంది.

కనుక $n(E)={}^{10}C_2+{}^{10}C_2=\frac{2(10)(9)}{1\times 2}=90$

(ii) ఎంపిక చేసిన రెండు సంఖ్యల మొత్తం బేసి సంఖ్య కావడానికి సంభావ్యత

$$P(E^C)=1-P(E)=1-\frac{9}{19}=\frac{10}{19}$$

www.sakshieducation.com

9. **ఒక జత పాచికలను 24 సార్లు దొర్లించారు. ఈ 24 పర్యాయాలలో ఎప్పుడూ ఒక జత 6 ను దొర్లించని వ్యక్తి గెలిచినట్లుగా భావిస్తారు. ఆ వ్యక్తి గెలిచే సంభావ్యత ఎంత?**

సాధన. పాచికను 2 సార్లు దొర్లిస్తే పూర్ణ లఘు ఘటనల సంఖ్య

$$= 6 \times 6 = 36$$

రెండు పాచికలను 24 సార్లు దొర్లించారు కనుక

$$n(S) = (36)^{24}$$

E అనేది దొర్లించిన 24 సార్లలో ఏ ఒక్కసారీ రెండింటిపై 6 రాకపోవటం అనే ఘటన

$$n(E) = 35 \times 35 \times .... \times 35(24 \quad = (35)^{24}$$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{(35)^{24}}{(36)^{24}}$$

10. **ఒక పెట్టెలోని 15 బల్బులలో 5 పనిచేయనివి. పెట్టెలో నుంచి యాదృచ్ఛికంగా 5 బల్బులను తీసినప్పుడు, క్రింది ఘటనల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.**

(i) **వాటిలో ఏదీ లోపం లేనిది కావటం అనేది**

(ii) **వాటిలో ఏదోఒకటి పనిచేయనిది**

(iii) **వాటిలో కనీసం ఒకటి పనిచేయనిది.**

సాధన. పెట్టెలో ఉన్న 15 బల్బులలో 5 లోపం గలిగి ఉన్నవి. మిగిలిన 10 మంచివి. పెట్టె నుండి యాదృచ్ఛికంగా 5 బల్బులను ఎన్నుకునే విధాలు

$$n(S) = {}^{15}C_5$$

(i) E_1 అనేది 5 బల్బులు ఏదీ లోపం లేనిది అనే ఘటన

$$n(E_1) = {}^{10}C_5$$

$$P(E_1) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{{}^{10}C_5}{{}^{15}C_5}$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11} = \frac{12}{143}$$

(ii) E_2 అనే 5 బల్బులలో ఒకే ఒకటి లోపం గలది ఉండే ఘటన $n(E_2) = {}^5C_1 \times {}^{10}C_4$

$$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{5 \times {}^{10}C_4}{{}^{15}C_2}$$

www.sakshieducation.com

$$=\frac{5\times\frac{10\times9\times8\times7}{1\times2\times3\times4}}{\frac{15\times14\times13\times12\times11}{1\times2\times3\times4\times5}}=\frac{50}{143}$$

(*iii*) కనీసం ఒకటి పనిచేయనిది అయ్యేఘటన $=1-P(E_1)=1-\frac{12}{143}=\frac{131}{143}$

11. **ఒక కాంట్రీక్టరు రోడ్డు కాంట్రాక్టును పొందే సంభావ్యత $\frac{2}{3}$, భవనం కాంట్రాక్టును పొందే సంభావ్యత $\frac{5}{9}$, కనీసం ఒకకాంట్రాక్టునైనా పొందే సంభావ్యత $\frac{4}{5}$. అతడు రెండు కాంట్రాక్టులనూ పొందే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.**

సాధన. కాంట్రాక్టరు రోడ్డు కాంట్రాక్టు పొందటానికి సంభావ్యత $P(A)=\frac{2}{3}$

భవనం కాంట్రాక్టు పొందదానికిసంభావ్యత $P(B)=\frac{5}{9}$

కనీసం ఒకటి పొందటానికి సంభావ్యత $P(A\cup B)=\frac{4}{5}$

రెండు కాట్రాక్టులనూ పొందటానికి సంభావ్యత

$[P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)]$

(*i.e.,*) $P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)$

$=\frac{2}{3}+\frac{5}{9}-\frac{4}{5}$

$=\frac{30+25-36}{45}=\frac{19}{45}$

12.. **ఒక పరుగు పందెంలో A,B,C మూడు గుర్రాలు. A పందెం గెలిచే సంభావ్యత B సంభావ్యతకు రెట్టింపు, B పెందెం గెలిచే సంభావ్యత C గెలుపుకి రెట్టింపు అయితే, A,B,C లు ఆ పెందెం గెలవగల సంభావ్యతలేవి?**

సాధన. ఇచ్చుట A,B,C లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు

$P(A)+P(B)+P(C)=1$................(1)

$P(A)=2P(B), P(B)=2P(C)$.........(2)

(1), (2) ల నుంచి

$2P(B)+P(B)+P(C)=1$

$\Rightarrow 3P(B)+P(C)=1$

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow 3(2)P(C)+P(C)=1$

$\Rightarrow 7P(C)=1 \Rightarrow P(C)=\frac{1}{7}$

$P(C)=\frac{1}{7}, P(B)=2\left(\frac{1}{7}\right)=\frac{2}{7}$

$P(A)=2\left(\frac{2}{7}\right)=\frac{4}{7}$

13. ఒకగుట్టలో గల 50 స్క్రూలలో 5 చెడిపోయినవి. ఈ గుట్టలో నుంచి ముడు స్క్రూలను యాదృచ్ఛికంగా తీశారు. (a) తీసిన స్క్రూలను తిరిగి భర్తీ చేసే విధంగా (b) తీసిన స్క్రూలను తిరిగి భర్తీ చేయని విధంగా వీటిని ఎంపిక చేశారనుకుంటే, మూడు స్క్రూలు పనిచేసేవి అయ్యే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. స్క్రూలు సంఖ్య $=50,$

అందు చెడిపోయినవి $=5$

మంచివి $=45$

E అనేది 3 స్క్రూలు చెడిపోయినవి అయ్యే ఘటన

$a)$ ఒక స్క్రూను ఎన్నుకొన్న వెంటేనే తిరిగి అందులోకే చేర్చడం

$$P(E)=\frac{{}^{45}C_1}{{}^{50}C_1}\times\frac{{}^{45}C_1}{{}^{50}C_1}\times\frac{{}^{45}C_1}{{}^{50}C_1}$$

$$=\frac{45}{50}\times\frac{45}{50}\times\frac{45}{50}=\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}\times\frac{9}{10}=\left(\frac{9}{10}\right)^3$$

$b)$ ఒక స్క్రూను ఎన్నుకొన్న వెంటనే తిరిగి అందులోకి చేర్చకపోవడం

$$P(E)=\frac{{}^{45}C_1}{{}^{50}C_1}\times\frac{{}^{44}C_1}{{}^{49}C_1}\times\frac{{}^{43}C_1}{{}^{48}C_1}$$

$$=\frac{45}{50}\times\frac{44}{49}\times\frac{43}{48}$$

$$=\frac{1419}{1960}$$

www.sakshieducation.com

14. ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో A, B, C లు మూడు స్వతంత్ర ఘటనలవుతూ $P\left(A\cap B^C\cap C^C\right)=\frac{1}{4}$, $P\left(A^C\cap B\cap C^C\right)=\frac{1}{8}, P\left(A^C\cap B^C\cap C^C\right)=\frac{1}{4}$ అయినప్పుడు లను కనుక్కోండి.

సాధన. A, B, C లు మూడు స్వతంత్ర ఘటనలు

$$P\left(A\cap B^C\cap C^C\right)=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(A).P\left(B^C\right),P\left(C^C\right)=\frac{1}{4}\ (1)$$

$$P\left(A^C\cap B\cap C^C\right)=\frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow P\left(A^C\right).P(B).P\left(C^C\right)=\frac{1}{8}\quad (2)$$

$$P\left(A^C\cap B^C\cap C^C\right)=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P\left(A^C\right).P\left(B^C\right).P\left(C^C\right)=\frac{1}{4}\quad (3)$$

$$(1)\div(3)\Rightarrow \frac{P(A).P\left(B^C\right).P\left(C^C\right)}{P\left(A^C\right).P\left(B^C\right).P\left(C^C\right)}=\frac{\left(\frac{1}{4}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)}=1$$

$$\Rightarrow \frac{P(A)}{P\left(A^C\right)}=1$$

$$\Rightarrow \frac{P(A)}{1-P(A)}=1$$

$$\Rightarrow P(A)=1-P(A)$$

$$\Rightarrow 2P(A)=1\Rightarrow P(A)=\frac{1}{2}$$

$$(2)\div(3)\Rightarrow \frac{P\left(A^C\right)P(B).P\left(C^C\right)}{P\left(A^C\right).P\left(B^C\right).P\left(C^C\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(\frac{1}{8}\right)}{\left(\frac{1}{4}\right)}\Rightarrow \frac{P(B)}{1-P(B)}=\frac{1}{2}$$

www.sakshieducation.com

$$\Rightarrow 2P(B) = 1 - P(B)$$

$$\Rightarrow 3P(B) = 1$$

$$\therefore P(B) = \frac{1}{3}$$

(1) నుండి $P(A).P(B^C).P(C^C) = \frac{1}{4}$

$$\Rightarrow P(A).[1-P(B)][1-P(C)] = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow P(A)\left(1-\frac{1}{3}\right)[1-P(C)] = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)[1-P(C)] = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow 1-P(C) = \frac{1}{4}\times 3 = \frac{3}{4}$$

$$\therefore P(C) = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{3}, P(C) = \frac{1}{4}.$$

15. ఒక సంచిలో 3 నల్లని, 4 తెల్లని బంతులు ఉన్నాయి. రెండో సంచిలో 4 నల్లని, 3 తెల్లని బంతులు ఉన్నాయి. ఒక పాచికను, దొర్లించి దానిపై 1 లేదా 3 పడినప్పుడు మొదటి సంచిని ఎంపిక చేస్తారు. మిగిలిన సందర్భాలలో రెండో సంచిని ఎనిపిక చేస్తారు. ఒక సంచిని ఈ విధంగా ఎంపిక చేసినప్పుడు ఒక నల్లని బంతిని తీసే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. పాచికపై 1 లేదా 3 పడినప్పుడు మొదటి సంచిని ఎంపిక చేస్తారు. కనుక మొదటి సంచిని ఎన్నుకొనేందుకు

సంభావ్యత $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore$ రెండవ సంచిని ఎన్నుకొనేందుకు సంభావ్యత

$$= 1-\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

మొదటి సంచిని ఎనిపికచేసి అందుండి నల్లబంతి తీసేందుకు సంభావ్యత $= \frac{1}{3}\times\frac{3}{7} = \frac{3}{21}$

ఇక రెండవ సంచిని ఎంపికచేసి అందుండి నల్ల బంతి తీసేందుకు సంభావ్యత $= \frac{2}{3}\times\frac{4}{7} = \frac{8}{21}$

కనుక కావలసిన సంభావ్యత $= \frac{3}{21}+\frac{8}{21} = \frac{11}{21}$.

www.sakshieducation.com

16. ఒక జత పాచికలను దొర్లించారు. ఏ పాచిక 2ను చూప నట్లయితే, ఆ పాచికలపై మొత్తం 7 రాగల సంభావ్యత ఎంత?

సాధన. A అనేది రెండు పాచికలపై మొత్తం 7 రాగల ఘటన. అప్పుడు

$A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

B అనేది ఏ పాచిక 2 ను చూపనట్టి ఘటన.

$B=\{(1,1),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$

$(3,1),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$

$(4,1),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$

$(5,1),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$

$(6,1),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$n(B)=25$

$A\cap B=\{(1,6),(3,4),(4,3),(6,1)\}$

$n(A\cap B)=4$

కావలసిన సంభావ్యత $P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{4}{25}.$

17. ఒక జత పాచికలను దొర్లించారు. ఆ పాచికలపైమొత్తం 7 అయినప్పుడు, ఏ ఒక పాచిక రెండు చూపకపోయే ఘటన సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. పాచికలపై మొత్తం 7 రావటం అనే ఘటన

A అనుకుంటే $A=\{(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)\}$

$\therefore n(A)=6$

ఏ ఒక పాచిక రెండు చూపకపోవటం అనే ఘటన

B అనుకుంటే

$B=\{(1,1),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6)$

$(3,1),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6)$

$(4,1),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6)$

www.sakshieducation.com

$(5,1),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)$

$(6,1),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}$

$A \cap B = \{(1,6),(3,4),(4,3),(6,1)\}$

$n(A \cap B) = 4$

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$= \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

18. A, B **లు ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలోని ఘటనలు;**

$P(B) \neq 1, P\left(\frac{A}{B^C}\right) = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$ **అని చూపండి.**

సాధన. నియతసంభావ్యతా నిర్వచనం నుండి

$$P\left(\frac{A}{B^C}\right) = \frac{P(A \cap B^C)}{P(B^C)} = \frac{P(A) - P(A \cap B)}{1 - P(B)}$$

$$\left[\because A \cap B^C = A - (A \cap B), P(B^C) = 1 - P(B)\right]$$

19. ఒక పాచికను, వరుసగా 2 సార్లు దొర్లించారు. రెండో ప్రయత్నంలో చూపే సంఖ్య, మొదటి ప్రయత్నంలో చూపే సంఖ్యకంటే పెద్దది కాగల సంభావ్యత ఎంత?

సాధన. ఒక పాచికను వరుసగా రెండుసార్లు దొర్లించారు. కనుక $n(S) = 6 \times 6 = 36$

E అనేది మొదటి ప్రయత్నంలోదొర్లించినప్పుడు పాచికపై వచ్చేసంఖ్య కంటే రెండో ప్రయత్నంలో దొర్లించినప్పుడు దానిపై వచ్చే సంఖ్య పెద్దది అయ్యే ఘటన

$E = \{(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$

$(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),$

$(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)\}$

$n(E) = 15$

$$\therefore P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}.$$

www.sakshieducation.com

20. **ఒక చీట్ల పేక కట్ట నుంచి ఒక పేకముక్కను యాదృచ్ఛికంగా తీశారు. తీసినది ఆసు అయ్యే ఘటన, ఆటీను అయ్యేఘటన స్వతంత్ర ఘటనలని చూపండి.**

సాధన. పేకకట్ట నుండి ఒక ముక్కను ఎన్నుకొనే విధాల సంఖ్య

$n(S) = {}^{52}C_1 = 52$

E_1 అనేది ఆసు అయ్యే ఘటన అనుకుంటే

$n(E_1) = {}^{4}C_1 = 4$

$P(E_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$

E_2 అనేది ఆటీను అయ్యే ఘటన

$n(E_1) = {}^{13}C_1 = 13$

$P(E_2) = \frac{n(E_2)}{n(S)} = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$

$E_1 \cap E_2$ అనే ఘటన తీసిన ముక్క ఆటీను ఆసు కావటం

$n(E_1 \cap E_2) = 1$

$P(E_1 \cap E_2) = \frac{1}{52} = \frac{1}{13} \times \frac{1}{4} = P(E_1).P(E_2)$

కనుక E_1, E_2 లు స్వతంత్ర ఘటనలు

21. $P(A \cup B) = 0.65, P(A \cap B) = 0.15$ **అయ్యేటట్లు** A, B **రెండు ఘటనలు. అప్పుడు** $P(A^C) + P(B^C)$ **విలువను కనుక్కోండి.**

సాధన. A, B లు రెండు ఘటనలు.

$P(A \cup B) = 0.65, P(A \cap B) = 0.15$

$\because P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\Rightarrow 0.65 = P(A) + P(B) - 0.15$

$\Rightarrow P(A) + P(B) = 0.65 + 0.15 = 0.80$

ఇప్పుడు

$P(A^C) + P(B^C) = [1 - P(A)] + [1 - P(B)]$

$= 2 - (P(A) + P(B))$

$= 2 - 0.80$

www.sakshieducation.com

$= 1.2$

$\therefore P(A^C) + P(B^C) = 1.2$

22. A, B, C **స్వతంత్ర ఘటనలు అయితే,** $A \cup B$ **మరియు** C **కూడా స్వతంత్ర ఘటనలనిచూపండి.**

సాధన. A, B, C లు సంతంత్ర ఘటనలుకనుక

$P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$ (1)

మరియు $A, B; B, C; C, A$ లు కూడా సంతంత్ర ఘటనలే.

$P(A \cap C) = P(A).P(C)$

$P(B \cap C) = P(B).P(C)$,

$P[(A \cup B) \cap C] = P[(A \cap C) \cup (B \cap C)]$

$= P(A \cap C) + P(B \cap C) - P[(A \cap C) \cap (B \cap C)]$

$= P(A).P(C) + P(B).P(C) - P(A \cap B \cap C)$

$= P(A).P(C) + P(B).P(C) - P(A).P(B).P(C)$

$= P(C)[P(A \cap B)]$

$\therefore P[(A \cup B) \cap C) = P(A \cup B).P(C)$

$A \cup B, C$ లు సంతంత్ర ఘటనలు

23. **రెండు ఘటనలు జరిగే సంభావ్యత** $\frac{1}{6}$ **అయ్యేటట్లు, రెండూ జరగకపోవడానికి గల సంభావ్యత** $\frac{1}{3}$ **అయ్యేటట్లుగా** A, B **లు రెండు స్వతంత్ర ఘటనలు.** $P(A)$ **ను కనుక్కోండి.**

సాధన. A, B లు సంతంత్రఘటనలు

$P(A \cap B) = \frac{1}{6} \Rightarrow P(A).P(B) = \frac{1}{6}$ (1)

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{1}{3} \Rightarrow P(\bar{A}).P(\bar{B}) = \frac{1}{3}$ (2)

$P(A) = x, P(B) = y$ అనుకుందాం. అపుడు

$(1),(2)$ ల నుండి

$xy = \frac{1}{6}$ (3)

www.sakshieducation.com

$$(1-x)(1-y)=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 1-x-y+xy=\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{1}{6}-\frac{1}{3}=x+y$$

$$\Rightarrow \frac{6+1-2}{6}=x+y$$

$$\therefore x+y=\frac{5}{6} \quad (4)$$

$(3),(4)$ ల నుండి

$$x+\frac{1}{6x}=\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow \frac{6x^2+1}{6x}=\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow 6x^2+1=5x$$

$$\Rightarrow 6x^2-5x+1=0$$

$$\Rightarrow (2x-1)(3x-1)=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2} \text{ లేక } \frac{1}{3}$$

24. ఒక క్రికెట్ ఆటలో ఇండియాపై ఆస్ట్రేలియా గెలిచే సంభావ్యత $\frac{1}{3}$. ఇండియా, ఆస్ట్రేలియా 3 ఆటలలో ఆడితే,

$i)$ ఆస్ట్రేలియా మూడు ఆటలలో ఓడిపోయే సంభావ్యతను,

$ii)$ ఆస్ట్రేలియాకనీసం ఒక ఆట గెలిచే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. E అనేది ఇండియా పై ఆస్ట్రేలియాగెలిచే ఘటన అనుకుందా.

$$P(E)=\frac{1}{3}, P(\bar{E})=1-P(E)=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$i)$ ఆస్ట్రేలియా మూడు ఆటలు ఓడిపోవడానికి సంభావ్యత $=\left(P(\bar{E})\right)^3=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

$ii)$ ఆస్ట్రేలియా కనీసం ఒక ఆట గెలిచే సంభావ్యత

$$=1-\left(P(\bar{E})\right)^3$$

www.sakshieducation.com

$$=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$$

25. ఒక కంపెనీలో ఉద్యోగుల నుంచి 5 గురు వ్యక్తులను ఆ కంపెనీ పాలక వర్గ ప్రతినిధులుగా ఎన్నుకొన్నారు. 5 గురి వ్యక్తుల వివరాలు కింది విధంగా ఉన్నాయి

క్ర.సం.	పేరు	లింగం	వయస్సు (సంIIలలో)
1	హరీష్	పు	30
2	రోహన్	పు	33
3	శీతల	స్త్రీ	46
4	అలీస్	స్త్రీ	28
5	సలీం	పు	41

పై సమూహం నుంచి ఒక వ్యక్తిని యాదృచ్ఛికంగా ప్రసంగకర్తగా ఎన్నుకొంటే, ఆ వ్యక్తి పురుషుడు లేదా 35 సంవత్సరాలు పైబడినవాడు అయ్యే సంభావ్యతను కనుక్కోండి

జ: ఎన్నుకొనే వ్యక్తి పురుషుడు అయ్యే ఘటన A అనుకొనిన,

$n(A)=3$

ఎన్నుకొనే వ్యక్తి 35 సంవత్సరములు దాటిన వ్యక్తి అయ్యే ఘటన B అనుకొనిన, $n(B)=2$

శాంపుల్ ఆవరణం $'S'$ అనుకొనిన

$n(S)=5,\ n(A\cap B)=1$

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{n(A)}{n(S)}+\frac{n(B)}{n(S)}-\frac{n(A\cap B)}{n(S)}$$

$$=\frac{3}{5}+\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

26. వందమంది విద్యార్థుల నుంచి 40 మరియు 60 మంది విద్యార్థులు గల రెండు సెక్షన్లు ఏర్పడ్డాయి. నీవు, నీ మిత్రుడు ఆ వంద మందిలో ఉండి,

$i)$ మీ ఇద్దరూ ఒకే సెక్షన్‌లోకి ప్రవేశించే వేర్వేరు సెక్షన్లలోకి ప్రవేశించే

$ii)$ సంభావ్యతలను కనుక్కోండి

జ: S శాంపుల్ ఆవరణం అనుకొనిన $n(S)={}^{100}C_{40}$

$i)$ ఇద్దరూ ఒకే సెక్షన్‌లోకి ప్రవేశించే సంభావ్యత

$n(A)={}^{98}C_{38}+{}^{98}C_{58}$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{{}^{98}C_{38}+{}^{98}C_{58}}{{}^{100}C_{40}}=\frac{17}{33}$$

$ii)$ వేర్వేరు సెక్షన్లలోకి ప్రవేశించే సంభావ్యత

www.sakshieducation.com

$n(A) = {}^{98}C_{39} + {}^{98}C_{59}$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{{}^{98}C_{39} + {}^{98}C_{54}}{{}^{100}C_{40}} = \frac{16}{33}$$

27. A, B లు రెండు ఘటనలైతే $P(A/B)P(B) + P(A/B^c)P(B^c) = P(A)$ అని చూపండి.

జ: $P\left(\frac{A}{B}\right)P(B) + P\left(\frac{A}{\overline{B}}\right)P\left(\overline{B}\right)$

$$= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \times P(B) + \frac{P\left(A \cap \overline{B}\right)}{P\left(\overline{B}\right)} \times P\left(\overline{B}\right)$$

$$= P(A \cap B) + P(A) - P(A \cap B) = P(A)$$

$$\left[\because \left(A \cap \overline{B}\right) = A - (A \cap B)\right]$$

28. ఒక పాత్రలో 12 ఎర్రని బంతులు, 12 ఆకుపచ్చని బంతులు ఉన్నాయి. ఒకదాని వెంబడి మరొకటి, భర్తీ చేయని విధంగా రెండు బంతులను తీశారు. మొదట తీసిన బంతి ఎర్రనిది అయినప్పుడు, రెండో బంతి ఆకపచ్చనది కాగల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జ: E_1 అనేది మొదటిసారి తీసిన బంతి ఎర్రనిదిగా అయ్యే ఘటన పాత్రలోని బంతుల సంఖ్య = 24

$\therefore n(E_1) = {}^{12}C_1 = 12$

$$\therefore P(E_1) = \frac{n(E_1)}{n(S)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

మొదటిసారి తీసిన బంతి సంచిలో చేర్చలేదు. కనుక ఇప్పుడు సంచిలోని బంతుల సంఖ్య = 23 రెండవసారి తీసిన బంతి ఆకుపచ్చనిది అయ్యే ఘటన E_2 అనుకొనుము.

$$n\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = {}^{12}C_1 = 12$$

$$\therefore P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{12}{23}$$

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత

$$P\left(E_1 \cap E_2\right) = P(E_1).P\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{12}{23} = \frac{6}{23}$$

మొదట తీసిన బంతి ఎర్రనిది అయినప్పుడు, రెండో బంతి ఆకుపచ్చనిది కాగల సంభావ్యత $= \frac{6}{23}$

www.sakshieducation.com

29. A **అనే బాలుడు స్కాలర్‌షిప్పు పొందే సంభావ్యత 0.9.** B **అనే మరో బాలుడు స్కాలర్‌షిప్పు పొందే సంభావ్యత 0.8. వీరిలో కనీసం ఒకరు స్కాలర్‌షిప్పు పొందే సంభావ్యత ఎంత?**

జ: బాలుడు E_1 స్కాలర్‌షిప్ పొందడానికి సంభావ్యత

$P(E_1)=0.9$

బాలుడు E_2 స్కాలర్‌షిప్ పొందడానికి సంభావ్యత

$P(E_2)=0.8$

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత

$P\left(E_1 \cup E_2\right)=P(E_1)+P(E_2)-P(E_1 \cap E_2)$

$=P\left(E_1\right)+P(E_2)-P(E_1).P(E_2)$

$=0.9+0.8-0.72$

$=1.7-0.72=0.98$

29. ఒక నాణాన్ని మూడుసార్లు ఎగరవేశారనుకోండి. మూడు బొమ్మలు వచ్చే ఘటన A**, మొదటిసారి ఎగరవేసినప్పుడు బొమ్మ వచ్చే ఘటన** B **అనుకోండి. అప్పుడు** A, B **లు అస్వతంత్ర ఘటనలని చూపండి.**

జ: నాణేన్ని మూడు సార్లు ఎగరవేశారు కనుక

$S=\{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT,$

$TTH, TTT\}$

$\Rightarrow n(S)=2^3=8$

A అనేది 3 బొమ్మలు వచ్చే ఘటన, కనుక

$\Rightarrow n(A)={}^3C_3=1 \Rightarrow P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{1}{8}$

B అనేది మొదటిసారి ఎగరవేసినప్పుడు బొమ్మ వచ్చే

ఘటన $B=\{HHH, HHT, HTH, HTT\}$

$n(B)=4 \quad \therefore P(B)=\dfrac{n(B)}{n(S)}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$

$A \cap B=\{HHH\}$

$n(A \cap B)=1$

$n(A \cap B)=\dfrac{n(A \cap B)}{n(S)}=\dfrac{1}{8}$

$P(A).P(B)=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{16}$

$\therefore P(A \cap B) \neq P(A).P(B)$

www.sakshieducation.com

$\therefore A, B$ లు అస్వతంత్ర ఘటనలు

30. ఒక నిష్పాక్షిక పాచికల యుగ్మాన్ని దొర్లించారు. రెండింటి మూఖాల పై ఒకే సంఖ్య వచ్చే ఘటన A అనుకోండి. రెండింటి ముఖాలపైన వచ్చే సంఖ్యల మొత్తం 7 కంటే ఎక్కువ అయ్యే ఘటన B అనుకోండి. అప్పుడు

$i) P(A/B)$, $ii) P(B/A)$ లను కనుక్కోండి.

జ: రెండు నిష్పాక్షిక పాచికలను దొర్లించారు. కనుక

$n(S) = 36$

A అనేది రెండు పాచికలపై ఒకే సంఖ్య వచ్చే ఘటన

$n(A) = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6)\}$

$$P(A) = \frac{6}{36}$$

B అనేది రెండింటి పైన వచ్చే సంఖ్యల మొత్తం 7 కంటే ఎక్కువ అయ్యే ఘటన

$n(B) = \{(2,6), (3,5), (4,4), (5,3), (6,2), (3,6),$

$(4,5), (5,4), (6,3), (4,6), (5,5), (6,4), (5,6),$

$(6,5), (6,6)\} = 15$

$$P(B) = \frac{15}{36}$$

$n(A \cup B) = \{(4,4), (5,5), (6,6)\} = 3$

$$P(A \cap B) = \frac{3}{36}$$

$$i) P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{15}{36}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

$$ii) P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

31. A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలనడానికి ఆవశ్యక పర్యాప్తు నియమం $P(A/B) = P\left(A/B^c\right)$ అని చూపండి.

జ: A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలు

$$L.H.S : P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

www.sakshieducation.com

$$R.H.S : P\left(A/B^c\right) = \frac{P\left(A \cap B^c\right)}{P\left(B^c\right)}$$

$$= \frac{P(A).P(B^c)}{P(B^c)} = P(A)$$

$$\therefore L.H.S = R.H.S$$

32. $P(A)=0.6,\ \ P(B)=0.7$ **తో** A, B **లు స్వతంత్ర ఘటనలనుకోండి. అప్పుడు**

$i)\,P(A\cap B)\ \ ii)\,P(A\cup B)\ \ iii)\,P(B/A)\ \ iv)\,P(A^c\cap B^c)$ **లను కనుక్కోండి**

జ: $P(A)=0.6,\ P(B)=0.7$ మరియు A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలు

$i)\,P(A\cap B)=P(A).P(B)$

$=0.6\times 0.7=0.42$

$ii)\,P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$=0.6+0.7-0.42$

$=1.3-0.42=0.88$

$$iii)\,P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.42}{0.6}=0.7$$

$iv)\,P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A})P(\overline{B})$

$=[1-P(A)][1-P(B)]$

$=(1-0.6)(1-0.7)$

$=(0.4)(0.3)=0.12$

33. ఒకనికి నిర్మాణపు కంపెనీలో ఉద్యోగం లభించింది. ఆ కంపెనీలోని పనివారు సమ్మెకు దిగే సంభావ్యత 0.65. సమ్మె లేనప్పుడు నిర్మాణం పని సరైన సమయంలో పూర్తయ్యే సంభావ్యత 0.80. సమ్మె ఉన్నప్పటికీ, నిర్మాణం పని పూర్తయ్యే సంభావ్యత 0.32 అయితే నిర్మాణం పని సరైన సమయంలో పూర్తయ్యే సంభావ్యతను నిర్ధారించండి.

జ: $P(S)=$ కంపెనీలోని పనివారు సమ్మెకు దిగే సంభావ్యత

= 0.65

$P(\overline{S})=$ కంపెనీలోని పనివారు సమ్మెకు దిగేకుండా ఉండుటకు సంభావ్యత

$P(\overline{S})=1-P(S)=1-0.65=0.35$

$P(A/S)=$ సమ్మె ఉన్నప్పటికీ, నిర్మాణం పని పూర్తయ్యే సంభావ్యత = 0.32

$P(A/\overline{S})=$ సమ్మె లేకుండా నిర్మణ పని సరైన సమయంలో పూర్తయ్యే సంభావ్యత = 0.80

$P(A)=$ నిర్మాణ పని సరైన సమయంలో పూర్తి కావడానికి సంభావ్యత

$$\therefore P(A)=P(S)P\left(\frac{A}{S}\right)+P(\overline{S})P\left(\frac{A}{\overline{S}}\right)$$

$=(0.65)(0.32)+(0.35)(0.80)$

www.sakshieducation.com

$= 0.2080 + 0.2800$

$= 0.4880$

$\therefore P(A) = 0.488$

34. A, B **లు ఏవేని ఘటనలయితే,**

$P(A \cap B) - P(A)P(B) \quad = P(A^c)P(B) - P(A^c \cap B) \quad = P(A)P(B^c) - P(A \cap B^c)$ **అని చూపండి.**

జ: $P(A^c)P(B) - P(A^c \cap B)$

$= [1 - P(A)]P(B) - P[(S - A) \cap B]$

$= P(A) - P(B) - P(B) + P(A \cap B)$

$= P(A \cap B) - P(A)P(B)$........(1)

$P(A)P(B^c) - P(A \cap B^c)$

$= P(A)[1 - P(B)] - P[A - (A \cap B)]$

$= P(A) - P(A)P(B) - P(A) + (A \cap B)$

$= P(A \cap B) - P(A)(B)$.........(2)

(1), (2) ల నుంచి

$= P(A \cap B) - P(A)(B)$

$= P(A^c)P(B) = P(A^c \cap B)$

$= P(A)P(B^c) = P(A \cap B^c)$

35. ఒక కళాశాలలో 25% బాలురు, 10% బాలికలు గణితాన్ని అభ్యసిస్తున్నారు. విద్యార్థుల సంఖ్యలో బాలికలు 60%. యాదృచ్ఛికంగా ఎంపిక చేసిన ఒక విద్యార్థి గణితం చదువుతున్నట్లయితే, ఆ విద్యార్థి బాలిక కాగల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జ: ఎన్నుకోబడిన విద్యార్థి బాలిక కాగల సంభావ్యత

$P(E_1) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

ఎన్నుకోబడిన విద్యార్థి బాలుడు కాగల సంభావ్యత

$P(E_2) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

బాలుడు గణితం అభ్యసించడానికి గల సంభావ్యత

$P\left(\frac{M}{E_1}\right) = \frac{1}{10}, P\left(\frac{M}{E_2}\right) = \frac{1}{4}$

బేయీ సిద్ధాంతం ప్రకారం, ఎంపిక చేసిన విద్యార్థి గణితం చదువుతున్నట్లయితే, ఆ విద్యార్థి బాలిక కాగల సంభావ్యత

www.sakshieducation.com

$$P\left(\frac{E}{M}\right)=\frac{P(E_1).P\left(\frac{M}{E_1}\right)}{P(E_1).P\left(\frac{M}{E_1}\right)+P(E_2).P\left(\frac{M}{E_2}\right)}$$

$$=\frac{\frac{3}{5}\times\frac{1}{10}}{\frac{3}{5}\times\frac{1}{10}+\frac{2}{5}\times\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{\frac{3}{50}}{\frac{3}{50}+\frac{2}{20}}+\frac{3}{50}\times\frac{1000}{160}=\frac{3\times 10}{80}=\frac{3}{8}$$

36. ఒకనికి 3 సార్లలో 2 సార్లు నిజం చెప్పే అలవాటు ఉంది. అతడు ఒక పాచికను దొర్లించి, అది 1 అని నివేదిస్తాడు. అది నిజంగా 1 అయ్యే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జ: ప్రతి 3 సార్లలో 2 సార్లు నిజం చెప్తే అతని సంభావ్యత $P(T)$ అయిన,

$$P(T)=\frac{2}{3}$$

$$P(\overline{T})=\frac{1}{3}$$

అతడు 1 అని నివేదించిన తరువాత పాచిక 1 చూపే సంభావ్యత $=\frac{1}{6}$

$$P\left(\frac{A}{T}\right)=\frac{1}{6}$$

$$P\left(\frac{A}{\overline{T}}\right)=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$$

37. 30 వరస పూర్ణాంకాల నుంచి రెండింటిని యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొన్నారు. వాటి మొత్తం బేసి సంఖ్య అయ్యే సంభావ్యత ఎంత?

జ: 30 సంఖ్యల నుంచి 2 సంఖ్యలను ఎన్నుకొనే విధాలు ${}^{30}C_2$. ఈ 30 సంఖ్యలలో 15 బేసి సంఖ్యలు కాగా 15 సరి సంఖ్యలు. ఎన్నుకొన్న రెండు సంఖ్యల మొత్తం బేసి సంఖ్య కావాలంటే, అందులో ఒకటి సరిసంఖ్య మరొకటి బేసి సంఖ్య కావాలి. కాబట్టి అనుకూల ఫలితాల సంఖ్య

${}^{15}C_2\times{}^{15}C_1$

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత

$$=\frac{{}^{15}C_1\times{}^{15}C_1}{{}^{30}C_2}=\frac{15\times 15\times 2}{30\times 29}=\frac{15}{29}$$

www.sakshieducation.com

38. A, B, C **లు మూడు ఘటనలైతే,** $P(A\cup B\cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(B\cap C)$ $-P(C\cap A)+P(A\cap B\cap C)$ **అని చూపండి.**

జ: $B\cup C = D$ గా రాద్దాం అప్పుడు

$P(A\cup B\cup C) = P(A\cup D)$

$P(A)+P(D)-P(A\cap D)$

$P(A)+P(B\cup C)-P[(A\cap(B\cap C)]$

$= P(A)+P(B)+P(C)-P(B\cap C)$

$-P[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$.................(1)

$E = (A\cap B), F = (A\cap C)$ అనుకొందాం అప్పుడు

$P[(A\cap B)\cup(A\cap C)] = P(E\cup F)$

$= P(E)+P(F)-P(E\cap F)$

$= P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap A\cap C)$

$= P(A\cap B)+P(A\cap C)-P(A\cap B\cap C)$...(2)

సమీకరణం (2) ను (1) లో ప్రతిక్షేపించి, కావలసిన ఫలితాన్ని పొందగలం.

39. A, B **లు ఒక నాణేన్ని ఒక్కొక్కరు 50 సార్లు ఏకకాలంలో ఎగరవేస్తారు. ఇద్దరికీ ఒకే ఎగరవేతలో బొరును పడకపోవడానికి సంభావ్యత కనుక్కోండి.**

జ: A, B లు ఇద్దరికీ ఒక ఎగరవేతలో బొరుసు పడకపోయే ఘటనలు E అనుకొందాం. ప్రతి ఎగరవేతలో కింద పేర్కొన్న నాలుగు రకాల అవకాశాలున్నాయి.

$i) A$ కి H రావడం, B కి H రావడం

$ii) A$ కి H రావడం, B కి T రావడం

$iii) A$ కి T రావడం, B కి H రావడం

$iv) A$ కి T రావడం, B కి T రావడం

ఇక్కడ 50 యత్నాలు కాబట్టి మొత్తం అవకాశాల సంఖ్య 4^{50} పైన పేర్కొన్న నాలుగు సందర్భాలలో $(i), (ii), (iii)$ లు మాత్రమే కావలసిన ఘటన E కు అనుకూల సందర్భాలు

$\therefore P(E) = \dfrac{3^{50}}{4^{50}} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{50}$

www.sakshieducation.com

దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

1. I, II, III **అంకెలను కలిగిన మూడు పెట్టెలలో క్రింది విధంగా బంతులు ఉన్నాయి.**

	తెల్లనివి	నల్లనివి	ఎర్రనివి
I	1	2	3
II	2	1	1
III	4	5	3

ఒక పెట్టెను ఎంచుకొని అందులోనుంచి ఒకబంతిని యాదృచ్ఛికంగా తీశారు. బంతి ఎర్రనిదైతే అది పెట్టె II ***నుంచితీయగల సంభావ్యతను కనుక్కోండి.***

సాధన. E_1, E_2, E_3 లు వరుసగా I, II, III పెట్టెలను ఎన్నుకునే ఘటనలు అనుకుందా.

$$P(E_1) = P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$$

పెట్టె I నుండి ఎర్ర బంతిని ఎన్నుకోవటానికి సంభావ్యత

$$(i.e.,) P(R/E_1) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ఇట్లే $P(R/E_1) = \frac{1}{4}, P(R/E_3) = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$

తీసిన బంతి ఎర్రనిది అయితే అది పెట్టె II నుంచి తీయగల సంభావ్యత (బేయిస్ సిద్ధాంతం నుంచి)

$$P(E_2/R) = \frac{P(E_2).P(R/E_2)}{P(E_1).P(R/E_1) + P(E2).P(R/E_2) + P(E_3).P(R/E_3)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}.\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{(1)} = \frac{1}{4}$$

www.sakshieducation.com

2 . **మూడు పాత్రలు క్రింది విధంగా బంతులను కలిగి ఉన్నాయి.**

పాత్ర I : 1 తెల్లనిది, 2 నల్లనివి

పాత్ర II : 2 తెల్లనిది, 1 నల్లనివి

పాత్ర III : 2 తెల్లనిది, 2 నల్లనివి

ఒక పాత్రను యాదృచ్ఛికంగా ఎనిపికచేసి, దాని నుంచి ఒక బంతిని తీశారు. అది తెల్లనిదిగా గుర్తించారు. ఆ బంతి పాత్ర III నుంచి తీయగల సంభావ్యత కనుక్కోండి.

సాధన. i పాత్రను ఎన్నుకొనే ఘటనను $E_i\left(i=1,2,3\right)$ తో సూచిస్తే,

i అనే పాత్రను ఎన్నుకోవటానికి సంభావ్యత $P\left(E_i\right)$

ఇచ్చుట $P\left(E_1\right)=P\left(E_2\right)=P\left(E_3\right)=\frac{1}{3}.$

i పాత్ర నునిడితెల్లబంతి రావటం అనే ఘటనను $\left(W/E_i\right)$ తో సూచిస్తే, దాని సంభావ్యత $P\left(W/E_i\right)$ అవుతుంది.

ఇప్పుడు

$$P\left(W/E_1\right)=\frac{1}{3}$$

$$P\left(W/E_2\right)=\frac{2}{3}$$

$$P\left(W/E_3\right)=\frac{2}{4}$$

తీసిన బంతి తెల్లనిది అయితే అది పాత్ర III నుంచిరావటానికి సంభావ్యత (బేయిస్ సిద్ధాంతం నుంచి)

$$P(E_3/W)=\frac{P(E_3).P(W/E_3)}{P(E_1).P\left(\frac{W}{E_1}\right)+P(E_2).P\left(\frac{W}{E_2}\right)+P(E_3).P\left(\frac{W}{E_3}\right)}$$

$$=\frac{\frac{1}{3}.\frac{2}{4}}{\frac{1}{3}.\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{2}{4}\right)}$$

www.sakshieducation.com

$$=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)}=\frac{1}{3}$$

3. **ఒక కాల్పుల పోటీలో A, B, C లక్ష్యాన్ని ఛేదించే సంభావ్యతలు వరుసగా $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4}$ వీరందరూ ఒకే లక్ష్యాన్ని కాల్పులు జరిపినప్పుడు**

$i)$ ఒకే ఒకరు లక్ష్యాన్ని ఛేదించే $ii)$ కనీసం ఒకరు లక్ష్యాన్ని ఛేదించే సంభావ్యతలను కనుక్కోండి.

సాధన. కాల్పుల పోటీలో A, B, C లక్ష్యాన్ని ఛేదించే సంభావ్యతలు వరుసగా

$P(A)=\frac{1}{2}; P(B)=\frac{2}{3}, P(C)=\frac{3}{4}$ లు

$\therefore P(\bar{A})=1-P(A)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$P(\bar{B})=1-P(B)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$P(\bar{C})=1-P(C)=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

$i)$ ఒకే ఒకరు లక్ష్యాన్ని ఛేదించే సంభావ్యత

$=P\left(A\cap\bar{B}\cap\bar{C}\right)+P(\bar{A}\cap B\cap\bar{C})$

$+P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap C)$

$=P(A).P(\bar{B}).P(\bar{C})+P(\bar{A}).P(B)P(\bar{C})$

$+P(\bar{A}).P(\bar{B}).P(C)$

$\because A, B, C$ లు స్వతంత్రఘటనలు

$=\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}+\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{1}{4}.+\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{3}{4}$

$=\frac{1+2+3}{24}=\frac{6}{24}=\frac{1}{4}.$

$ii)$ కనీసం ఒకరు లక్ష్యాన్ని ఛేదించే సంభావ్యత

$=P(A\cup B\cup C)$

$=1-$ (ఏ ఒక్కరు లక్ష్యాన్ని ఛేదించలేని సంభ్వాత)

www.sakshieducation.com

$$=1-\left[P(\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C})\right]$$

$$=1-P(\bar{A}).P(\bar{B}).P(\bar{C})$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}\right)$$

$$=1-\frac{1}{24}=\frac{23}{24}$$

4. మూడు పరస్పర వివర్జిత ఘటనల సంభావ్యతలు వరసగా $\frac{1+3p}{3},\frac{1-p}{4},\frac{1-2p}{2}$ అయితే $\frac{1}{3}\le p\le\frac{1}{2}$ అని నిరూపించండి.

జ: A,B,C లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు అనుకుంటే,

$$P(A)=\frac{1+3P}{3}$$

$$P(B)=\frac{1-P}{4}$$

$$P(C)=\frac{1-2P}{2}$$

ఇచ్చుట

$0\le P(A)\le 1 \qquad 0\le P(B)\le 1$

$0\le\frac{1+3P}{3}\le 1 \qquad 0\le\frac{1-P}{4}\le 1$

$0\le 1+3P\le 3 \qquad 0\le 1-P\le 4$

$-1\le 3P\le 2 \qquad -1\le -P\le 3$

$\frac{-1}{3}\le P\le\frac{2}{3}$

$1\ge P\ge -3........1)$

$-3\le P\le 1......(2)$

$0\le P\le 1$

$0\le\frac{1-2P}{2}\le 1$

$0\le 1-2P\le 2$

$-1\le -2P\le 1$

$1\le 2P\le -1$

www.sakshieducation.com

$\frac{1}{2} \le P \le -\frac{1}{2}$

$\frac{-1}{2} \le P \le \frac{1}{2}$...........(3)

A, B, C లు పరస్పర వివర్జిత ఘటనలు,

$0 \le P(A \cup B \cup C) \le 1$

$\Rightarrow 0 \le P(A) + P(B) + P(C) \le 1$

$\Rightarrow 0 \le \frac{4+12P+3-3P+6-12P}{12} \le 1$

$\Rightarrow 0 \le \frac{13-3P}{12} \le 1$

$\Rightarrow 0 \le 13-3P \le 12$

$\Rightarrow -13-3P \le -1$

$\Rightarrow 13 \ge 3P \ge 1$

$\Rightarrow \frac{13}{3} \ge P \ge \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \le P \le \frac{13}{3}$........(4)

$\left\{\frac{-1}{3}, -3, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}\right\}$ లో గరిష్ఠం $= \frac{1}{3}$

$\left\{\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{2}, \frac{13}{3}\right\}$ లో కనిష్ఠం $= \frac{1}{2}$

(1), (2), (3) మరియు (4) ల నుండి

$\frac{1}{3} \le P \le \frac{1}{2}$

www.sakshieducation.com

5. A, B, C లు ఒక బుడగను పేల్చడానికి ప్రయత్నం చేస్తారు. 5 ప్రయత్నాలలో 4 సార్లు A సఫలమవుతాడు. 4 ప్రయత్నాలలో 3 సార్లు B, 3 ప్రయత్నాలలో 2 సార్లు C సఫలం అవుతారు. ముగ్గురూ ఏకకాలంలో బుడగను పేల్చడానికి సంసిద్ధం అయితే, కనీసం ఇద్దరు బుడగను పేల్చివేసే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

జ: దత్తాంశం నుంచి

$P(A)=\frac{4}{5};\ P(B)=\frac{3}{4};\ P(C)=\frac{2}{3}$ ముగ్గురూ ఏకకాలంలో బుడగను పేల్చడానికి సంసిద్ధం అయితే, కనీసం ఇద్దరూ బుడగను పేల్చివేసే సంభావ్యత

$\therefore$ కావలసిన సంభావ్యత

$= P(A\cap B\cap \overline{C}) + P(A\cap \overline{B}\cap C) + P(\overline{A}\cap B\cap C) + P(A\cap B\cap C)$

$= P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(C) + P(A)P(B)P(C)$

$= \frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\left(1-\frac{2}{3}\right) + \frac{4}{5}\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{2}{3} + \left(1-\frac{4}{5}\right)\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$

$= \frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3} + \frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3} + \frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}$

$= \frac{1}{5} + \frac{2}{15} + \frac{1}{10} + \frac{2}{5} = \frac{6+4+3+12}{30}$

$= \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$

6. ఒక నిష్పాక్షిక పాచికను దొర్లించారు. $A=\{1,3,5\}$, $B=\{2,3\}$, $C=\{2,3,4,5\}$ ఘటనలను తీసుకోండి

$i)\ P(A\cap B),\ P(A\cup B)$

$ii)\ P(A/B),\ P(B/A)$

$iii)\ P(A/C),\ P(C/A)$

$iv)\ P(B/C),\ P(C/B)$ లను కనుక్కోండి

జ: $n(S)=6$

$P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2};\ P(B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ మరియు

$P(C)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$i)\ A\cap B=\{3\}$

$\therefore n(A\cap B)=1$

$\therefore P(A\cap B)=\frac{1}{6}$

$A\cup B=\{1,2,3,5\}$

www.sakshieducation.com

$n(A\cup B)=4$

$\therefore P(A\cup B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

$ii)\ P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

$=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{6}\left(\frac{3}{1}\right)=\frac{1}{2}$

$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}}=\frac{1}{3}$

$iii)\ P\left(\frac{A}{C}\right)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}$

$A\cap C=\{3,4\}$

$\therefore n(A\cap C)=2$

$\therefore P(A\cap C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore P\left(\frac{A}{C}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}$

$P\left(\frac{C}{A}\right)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$

$iv)\ P\left(\frac{B}{C}\right)=\frac{P(B\cap C)}{P(C)}$

$B\cap C'=\{2,3\}$

$\therefore n(B\cap C)=2\Rightarrow P(B\cap C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$\therefore P\left(\frac{B}{C}\right)=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$

www.sakshieducation.com

$$P\left(\frac{C}{B}\right)=\frac{P(C\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}=1$$

7. A, B, C **లు ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలోని మూడు ఘటనలు. కింది వాటిని నిరూపించండి.**

$i)\ P(A/A)=1$

$ii)\ P(\phi/A)=0$

$iii) A\subseteq B \Rightarrow P(A)-P(A\cap B)$

$iv)\ P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$

$v) A, B$ **లు పరస్పర వివర్జితాలై** $P(B)>0$ **అయితే,** $P(A/B)=0$

$vi)\ A, B$ **లు పరస్పర వివర్జితాలైతే,**

$$P(A/B^c)=\frac{P(A)}{1-P(B)}; P(B)\neq 1$$

$vii)\ A, B$ **లు పరస్పర వివర్జితాలు,** $P(A\cup B)\neq 0$ **అయితే,** $P(A/A\cup B)=\dfrac{P(A)}{P(A)+P(B)}$

జ: $i)$ ఇచ్చుట $P\left(\frac{A}{A}\right)=\frac{P(A\cap A)}{P(A)}=\frac{P(A)}{P(A)}=1$

$$ii) P\left(\frac{\phi}{A}\right)=\frac{P(\phi\cap A)}{P(A)}=\frac{P(\phi)}{P(A)}=\frac{0}{P(A)}=0$$

$iii)\ A\subseteq B \Rightarrow A\cap C\leq B\cap C$

$\Rightarrow P(A\cap C)\leq P(B\cap C)$

$$P\left(\frac{A}{C}\right)=\frac{P(A\cap C)}{P(C)}\leq\frac{P(B\cap C)}{P(C)}\leq P\left(\frac{B}{C}\right)$$

$$\therefore P\left(\frac{A}{C}\right)\leq P\left(\frac{B}{C}\right)$$

$iv) P(A-B)=P(A\cap \overline{B})$

$=P(A\cap(S-B))$

$=P[(A\cap S)-(A\cap B)]$

$=P(A)-P(A\cap B)$

$v)\ A, B$ లు పరస్పర వివర్జితాలై, $P(B)>0$ అయితే

$\Rightarrow A\cap B=\phi \Rightarrow P(A\cap B)=P(\phi)=0$

$$\therefore P\left(\frac{A}{B}\right)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0}{P(B)}=0$$

$(\because P(B)>0)$

$vi) A, B$ లు పరస్పర వివర్జితాలైన,

www.sakshieducation.com

$$P\left(\frac{A}{\overline{B}}\right)=\frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P(\overline{B})}$$

$$=\frac{P[A\cap(S-B)]}{P\left(\overline{B}\right)}$$

$$=\frac{P[(A\cap S)-(A\cap B)]}{P\left(\overline{B}\right)}$$

$$=\frac{P(A)-P(A\cap B)}{P\left(\overline{B}\right)}$$

$$=\frac{P(A)}{1-P(B)}$$

$[\because A\cap B=\phi\Rightarrow P(A\cap B)=0]$

vii) A, B లు పరస్పర వివర్జితాలై, $P(A\cup B)\neq 0$ అయిన

$$P\left(\frac{A}{A\cup B}\right)=\frac{P[A\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)}$$

$$=\frac{P(A)}{P(A\cup B)}$$

$[\because A\cap(A\cup B)=A]$

$$=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$$

$$=\frac{P(A)}{P(A)+P(B)}$$

$[\because P(A\cap B)=0]$

8. 75% సందర్భాలలో A నిజంమాట్లడతాడు, B 80% సందర్భాలలో B నిజం మాట్లాడతాడు. ఒక సంఘటన గురించివారు చెప్పే విషయం పర్సపరం విభేదించడానికి సంభావ్యత ఎంత?

సాధన. ఒక సంఘటన గురించి A, B లు నిజంచెప్పే ఘటనలు వరుసగా E_1, E_2 అనుకోండి అప్పుడు

$$P(E_1)=\frac{75}{100}=\frac{3}{4}, P(E_2)=\frac{80}{100}=\frac{4}{5}$$

$$P(E_1^C)=\frac{1}{4}, P(E_2^C)=\frac{1}{5}$$

ఒక సంఘటన గురించి వారు చెప్పే విషయం పరస్పరం విభేదించే ఘటన E అనుకొందాం. ఇది రెండు విధాలుగా జరగవచ్చు.

(*i*) A నిజం, B అబద్ధం చెబుతాడు

www.sakshieducation.com

(ii) A అబద్ధం, B నిజం చెబుతాడు

ఈ రెండు ఘటనలను వరసగా $E_1 \cap E_2^C, E_1^C \cap E_2$ తో సూచించవచ్చు. ఈ రెండూ పరస్పర వర్జిత ఘటనలు.

$P(E) = P(E_1 \cap E_2^C) + P(E_1^C \cap E_2)$

$= P(E_1)P(E_1^C) + P(E_1^C)P(E_2)$

E_1, E_2 లు స్వతంత్రాలు

$= \frac{3}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{7}{20}$

9. **కలన గణితంలోని ఒక సమస్యను ఇద్దరు విద్యార్థులు A, B లకు ఇస్తే వారు సమస్యను సాధించే సంభావ్యతలు వరుసగా $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ వారిద్దరూ స్వతంత్రంగా సమస్యను సాధించడానికి ప్రయత్నిస్తే, ఆ సమస్య సాధించగల సంభావ్యత ఎంత?**

సాధన. A, B లతో సమస్య సాధించబడే ఘటనలు వరుసగా E_1, E_2 లు అనుకందాం

దత్తాంశం ప్రకారం

$P(E_1) = \frac{1}{3}, P(E_2) = \frac{1}{4}$

ఈ రెండు ఘటనలు, స్వతంత్ర ఘటనలని గమనిద్దాం కాబట్టి కావలసిన సంభావ్యత

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

(E_1, E_2 లు స్వతంత్రాలు)

$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1).P(E_2)$

$= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{12}$

$= \frac{1}{2}$

18. **ఒక యాదృచ్ఛిక ప్రయోగంలో A, B లు స్వతంత్ర ఘటనలైతే A^C, B^C లూ రెండూ స్వతంత్ర ఘటలని చూపండి.**

సాధన. A, B స్వతంత్ర ఘటనలు కాబట్టి

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$ అప్పుడు

$P(A^C \cap B^C) = P\left\{(A \cup B)^C\right\}$

www.sakshieducation.com

$=1-P(A\cup B)$

$=1-\{P(A)+P(B)-P(A\cap B)\}$

$=1-\{P(A)+P(B)+P(A\cap B)\}$

$=[1-P(A)][1-P(B)]=P(A^C)P(B^C)$

A^C, B^C లు స్వతంత్ర ఘటనలు

10. మూడు B_1, B_2, B_3 లలోని బంతులు క్రింద వివరించిన రంగులలో ఉన్నాయి.

	తెల్లనివి	**నల్లనివి**	**ఎర్రనివి**
B_1	**2**	**1**	**2**
B_2	**3**	**2**	**4**
B_3	**4**	**3**	**2**

ఒక పాచికను దొర్లించారు పాచిక పై ముఖం పై 1లేదా 2 వస్తే B_1 ను ఎన్నుకొంటారు, 3 లేదా 4 వస్తే B_2 ను ఎన్నుకొంటారు, 5 లేదా 6 వస్తే B_3 ను ఎన్నుకొంటారు. ఈ విధంగా ఒక పెట్టెను ఎన్నుకొన్నాక, అందులో నుంచి ఒక బంతిని యాదృచ్ఛికంగా ఎన్నుకొన్నారు. అలా ఎన్నుకొన్న బంతి ఎర్రనిదైతే అది పెట్టె B_2 నుంచివచ్చే సంభావ్యత ఎంత?

సాధన. పెట్టె B_i ను ఎన్నుకొనే సంభావ్యత

$P(E_i)(i=1,2,3)$ అనుకొందాం అప్పుడు

$$P(E_i)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3};\ i=1,2,3$$

పెట్టె B_i ను ఎన్నుకొన్నాక అనిదులో నుంచితీసిన బంతి ఎర్రనిదయ్యే సంభావ్యత $P\left(\frac{R}{E_i}\right)$ అనుకొంటే

$$P\left(\frac{R}{E_1}\right)=\frac{2}{5},\ P\left(\frac{R}{E_2}\right)=\frac{4}{9},\ P\left(\frac{R}{E_3}\right)=\frac{2}{9}$$

కనుక్కోవలసిన సంభావ్యత $P\left(\frac{E_2}{R}\right)$ బేయి సిద్ధాంతం నుంచి $P\left(\frac{E_2}{R}\right)=$

$$\frac{P(E_2)P\left(\frac{R}{E_2}\right)}{P(E_1)P\left(\frac{R}{E_1}\right)+P(E_2)P\left(\frac{R}{E_2}\right)+P(E_3)P\left(\frac{R}{E_3}\right)}$$

www.sakshieducation.com

$$= \frac{\frac{1}{3}\times\frac{4}{9}}{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\frac{2}{9}\right)} = \frac{\left(\frac{4}{27}\right)}{\left(\frac{18+20+10}{5\times9\times3}\right)} = \frac{5}{12}$$

11. ఒక పాత్రలో w తెల్లని b నల్లని బంతులున్నాయి. Q, R అనే ఇద్దరు ఆటగాళ్ళు పాత్ర నుంచి ఒకరి తరువాతఒకరు, తీసిన బంతిని తిరిగి భర్తీ చేస్తూ, బంతులను తోస్తున్నారు. తెల్లటి బంతి ఎవరుముందుగా తీస్తే వారు గెలిచినట్లు. Q ఆటను మొదలు పెడితే, Q గెలిచే సంభావ్యతను కనుక్కోండి.

సాధన. తెల్లటి బంతిని తీసే ఘటన W తో, నల్లని బంతిని తీస్తే ఘటనను B తో సూచించామనుకోండి. అప్పుడు

$$P(W) = \frac{w}{w+b}, P(B) = \frac{b}{w+b}$$

Q గెలిచే సంభావ్యత (Q ముందుగా ఆటను మొదలు పెడితే)

$= P(W \quad BBW \quad BBBBW$ లేదా)

$= P(W) + P(BBW) + P(BBBBW) + ...$

$= P(W) + P(B)P(B)P(W) + P(B)P(B)P(B)\,P(B)P(W) + ...$

$= P(W)\left[1 + P(B)^2 + P(B)^4 + ...\right]$

$$= \frac{P(W)}{1-P(B)^2} = \frac{\frac{w}{w+b}}{1-\left(\frac{b}{w+b}\right)^2} = \frac{w+b}{w+2b}$$

12. సంభావ్యతల సంకలన సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి, నిరూపించుము.

సాధన. సంభావ్యతల సంకలన సిద్ధాంతము. ఒక యాదృచ్ఛికప్రయోగంలో E_1, E_2 లు ఏవైనా రెనిడు ఘటనలైతే

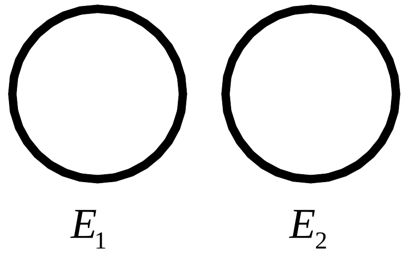
$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

నిరూపణ.

$case\,(i): E_1 \cap E_2 = \phi$ అనుకొందాం

$\Rightarrow P(E_1 \cap E_2) = P(\phi) = 0$

www.sakshieducation.com



సమ్మేళన స్వీకృతం నుండి

$P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

$= P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$

$\left[P(E_1 \cap E_2) = 0\right]$

$Case(ii): E_1 \cap E_2 \neq \phi$ అనుకొందాం

అప్పుడు $E_1 \cup E_2 = E_1 \cup (E_2 - E_1)$

మరియు $E_1 \cap (E_2 - E_1) = \phi$

$P(E_1 \cup E_2) = P\left[E_1 \cup \left(E_2 - E_1\right)\right]$

$= P\left(E_1\right) + P\left(E_2 - E_1\right)$

$P(E_1 \cup E_2) = P\left(E_1\right) + P\left(E_2 - E_1\right)$......(1)

ఇప్పుడు $E_2 = \left[\left(E_1 \cap E_2\right) \cup \left(E_2 - E_1\right)\right]$

మరియు $\left(E_1 \cap E_2\right) \cap \left(E_2 - E_1\right) = \phi$

కనుక $P(E_2) = P\left[\left(E_1 \cup E_2\right) \cup \left(E_2 - E_1\right)\right]$

$\Rightarrow P\left(E_2\right) = P\left(E_1 \cup E_2\right) + P\left(E_2 - E_1\right)$

$P\left(E_2 - E_1\right) = P\left(E_2\right) - P\left(E_1 \cap E_2\right)$........(2)

కాబట్టి (1), (2) ల నుంచి

$P\left(E_1 \cup E_2\right) = P\left(E_1\right) + P\left(E_2\right) - P\left(E_1 \cap E_2\right)$

www.sakshieducation.com

13. నియత సంభావ్యత ను నిర్వచింపుము. సంభావ్యత గుణన సిద్ధాంతాన్ని ప్రవచించి నిరూపించుము.

సాధన. నియతసంభావ్యత

ఒక యాదృచ్ఛికప్రయోగంలో ఘటన $A, P(A) > 0$ అయితే ఆ ప్రయోగంలో ఏదైనా ఘటన E యొక్క నియతసంభావ్యత $P\left(\frac{E}{A}\right)$ ను $P\left(\frac{E}{A}\right) = P\frac{(E \cap A)}{P(A)}$ అని నిర్వచిస్తాం

దీనినే ఘటన E యొక్క షరతు సంభావ్యత లేదా సాపేక్ష సంభావ్యత అంటాం.

సంభావ్యతా గుణన సిద్దాంత ప్రవచనము

$(Multiplication\, theorem\, of\ probability)$

ఒక యాదృచ్ఛికము ప్రయోగములో E_1, E_2 లు రెండు ఘటనలు మరియు $P(E_1) \neq 0, P(E_2) \neq 0$ అయిన

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$$ లేదా

$$P(E_2 \cap E_1) = P(E_2).P\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

నిరూపణ. యాదృచ్ఛిక ప్రయోగములో E_1, E_2 లు రెండు ఘటనలు $P(E_1) \neq 0, P(E_2) \neq 0$

$P(E_1) \neq 0$ నియత సంభావ్యతా నిర్వచనము నుండి $P\left(\frac{E_2}{E_1}\right) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_1)}$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1).P\left(\frac{E_2}{E_1}\right)$$

మరియు $P(E_2) \neq 0$ కనుక

$$P\left(\frac{E_1}{E_2}\right) = \frac{P(E_2 \cap E_1}{P(E_2)}$$

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_2).P\left(\frac{E_1}{E_2}\right)$$

www.sakshieducation.com

సమతలం

1. మూల బిందువు నుంచి తలానికి గీసిన లంబపాదం $(1,3,-5)$ అయితే, ఆ తలం సమీకరణం రాయండి.

సాధన. OP రేఖ గమన తలానికి లంబంగా ఉంది. OP యొక్క

D.R లు $1,3,-5$

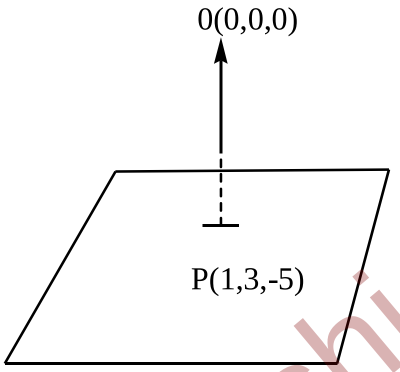
సమతలము $P(1,3,-5)$ గుండా పోతుంది.

సమతల సమీకరణము

$$1(x-1)+3(y-3)5(z+5)=0$$

$$x-1+3y-9-5z-25=0$$

$$x+3y-5z-35=0$$



2. తలం సమీకరణం $x+2y-3z-6=0$ అభిలంబ రూపానికి కుదించండి.

సాధన. సమతల సమీకరణము $x+2y-3z-6=0$

i.e., $x+2y-3z=6$

$$\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{1+4+9}$$

$=\sqrt{14}$ తో భాగించగా

అభిలంబ రూపంలో సమతల సమీకరణము

$$\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right)\times+\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right)y+\left(\frac{-3}{\sqrt{14}}\right)z=\frac{6}{14}$$

www.sakshieducation.com

3. X,Y,Z -అంతర ఖండాలు 1,2,4 గా కలిగిన సమతలం సమీకరణం రాయండి. అంతరఖండ రూపంలో సమతల సమీకరణము

సాధన. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$

దత్తాంశం $a=1, b=2, c=4$ అంతరఖండ రూపంలో సమతల సమీకరణము $\frac{x}{1}+\frac{y}{2}+\frac{z}{4}=1$

4 తో గుణించగా, $4x+2y+z=4$

4. $x+2y+2z-4=0$ తలానికి అభిలంబ రేఖ దిక్‌కొసైన్లు కనుక్కోండి.

సాధన. సమతల సమీకరణము $x+2y+2z-4=0$

అభిలంబరేఖ DR లు (1,2,2)

$\sqrt{1+4+4}=3$ తో భాగించగా,

అభిలంబరేఖ D.c $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

5. $4x-4y+2z+5=0$ సమీకరణాన్ని అంతరఖండ రూపంలోకి మార్చండి.

సాధన. సమతల సమీకరణము $4x-4y+2z+5=0$

$$-4x+4y-2z=5$$

$$-\frac{4x}{5}+\frac{4y}{5}-\frac{2z}{5}=1$$

అంతరఖండ రూపము $\frac{x}{\left(\frac{-5}{4}\right)}+\frac{y}{\left(\frac{5}{4}\right)}+\frac{z}{\left(-\frac{5}{2}\right)}=1$

x- అంతరఖండము $=-\frac{5}{4}$

y- అంతరఖండము $=\frac{5}{4}$

z- అంతరఖండము $=-\frac{5}{2}$

www.sakshieducation.com

6. $x+2y+2z-5=0, 3x+3y+2z-8=0$ తలాల మధ్యకోణం కనక్కోండి.

సాధన. సమతల సమీకరణము $x+2y+2z-5=0$

$3x+3y+2z-8=0$

$$\cos\theta = \frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$= \frac{|1(-3)+2(-3)+2(-2)|}{\sqrt{1+4+4}\sqrt{9+9+4}} = \frac{13}{3\sqrt{22}}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{13}{3\sqrt{22}}\right)$$

7. $(1,1,1)$ గుండాపోతూ, $x+2y+3z-7=0$ తలాలికి సమాంతరంగా ఉండే తలం సమీకరణం రాయండి.

సాధన. దత్త సమతన సమీకరణము $x+2y+3z-7=0$

సమాంతర తలం సమీకరణము $x+2y+3z=k$

ఈ తలం $P(1,1,1)$ గుండా పోతూ

$1+2+3=k \Rightarrow k=6$

కావలసిన సమతల సమీకరణము $x+2y+3z=6$

8. $(2,3,4)$ బిందువు గుండా పోతూ X-అక్షానికి లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం కనుక్కోండి

సాధన. సమతలం X- అక్షానికి లంబంగా ఉంటుంది

$\therefore$ X- అక్షం సమతలానికి అభిలంబరేఖ

X- అక్షం d.c.లు 1,0,0

కావలసిన సమతల సమీకరణము x=k

ఈ తలము $P(2,3,4)$ గుండా పోతుంది.

$\therefore 22=k$

కావలసిన సమతల సమీకరణము x=2

9. $2x+3y+7=0$, XY - తలానికి లంబంగా ఉండే తలాన్ని సూచిస్తుందని చూపండి.

సాధన. దత్త సమతల సమీకరణము $2x+3y+7=0$

xy తలం సమీకరణము z = 0

$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2 = 2.0+3.0+0.1$

$= 0+0+0=0$

$2x+3y+7=0$ తలము XY - తలానికి లంబంగా ఉంది.

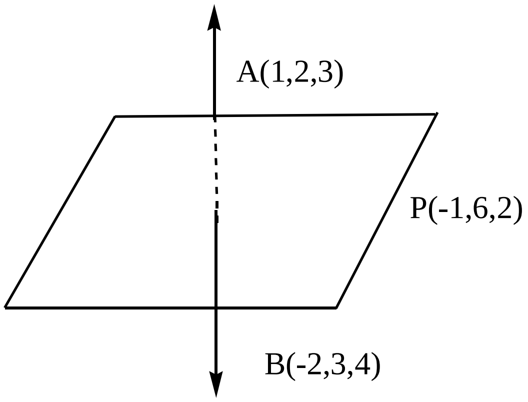
www.sakshieducation.com

10. $(-1,6,2)$ గుండాపోతూ $(1,2,3),(-2,3,4)$ బిందువులను కలిపే రేఖకు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం రాయండి.

సాధన. $A(1,2,3), B(-2,3,4)$ బిందువులను కలిపే రేఖాఖండానికి లంబంగా ఉంది.

AB యొక్క d.r లు $1+2, 2-3, 3-4$

i.e, 3,-1,-1



AB రేఖ అభిలంబరేఖ సమతలము $P(-1,6,2)$ గుండా పోతుంది.

కావలసిన సమతల సమీకరణము

$3(x+1)-(y-6)-1(z-2)=0$

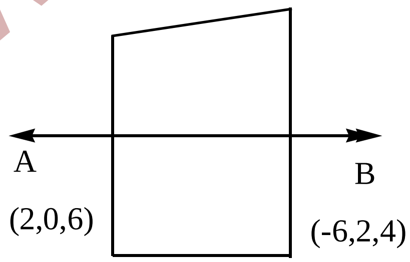
$3x+3-y+6-z+2=0$

$3x-y-z+11=0$

11. $(2,0,6),(-6,2,4)$ బిందువులను కలపే రేఖకు లంబంగా ఉంటూ, దానిని సమద్విఖండన చేసే తలం సమీకరణం రాయండి.

సాధన. $A(2,0,6), B(-6,2,4)$ లు దత్త బిందువులు

AB కి మధ్యబిందువు 'O'



O నిరూపకాలు $\left(\frac{2-6}{2}, \frac{0+2}{2}, \frac{6+4}{2}\right)=(-2,1,5)$

సమతలము AB లంబంగా ఉంది.

www.sakshieducation.com

సమతల అభిలంబ రేఖ d.r లు

$2+6, 0-2, 6-4$

$8, -2, 2$

సమతల సమీకరణము

$+8(x+2)-2(y-1)+2(z-5)=0$

$8x+16-2y+2+2z-10=0$

$8x-2y+2z+8=0$

12. $(0,0,-4)$ బిందువు గుండాపోతూ $(1,-2,2),(-3,1,-2)$ బిందువులను కలిపే రేఖకు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం రాయండి.

సాధన. $A(1,-2,2), B(-3,1,-2)$ లు దత్త బిందువులు

AB యొక్క d.r లు $1+3, -2-1, 2+2$ i.e., 4,-3,4

AB సమతలానికి లంబంగా ఉంటే $P(0,0,-4)$ సమతల సమీకరణము

$4(x-0)-3(y-0)+4(z+4)=0$

$4x-3y+4z+16=0$

13. $(4,4,0)$ గుండాపోతూ, $2x+y+2z+3=0$, $3x+3y+2z-8=0$ తలాలకు లంబంగా ఉండే తలం సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన. $P(4,4,0)$ గుండాపోయే సమతల సమీకరణం

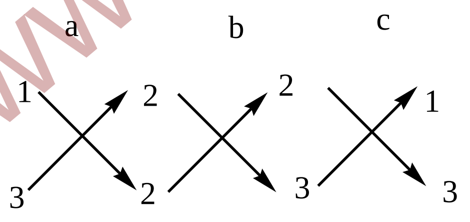
$a(x-4)+b(y-4)+c(z-0)=0$ ....(1)

ఈ తలం $2x+y+2z-3=0$

$3x+3y+2z-8=0$ లకు లంబంగా ఉంది.

$\therefore\ 2a+b+2c=0$ . ...(2)

$3a+3b+2c=0$ ....(3)



$$\frac{a}{2-6}=\frac{b}{6-4}=\frac{c}{6-3} \Rightarrow \frac{a}{-4}=\frac{b}{2}=\frac{c}{3}$$

(1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే, సమతల సమీకరణము

$-4(x-4)+2(y-4)+3(z-0)=0$

$-4x+16+2y-8+3z=0$

$-4x+2y+3z+8=0$

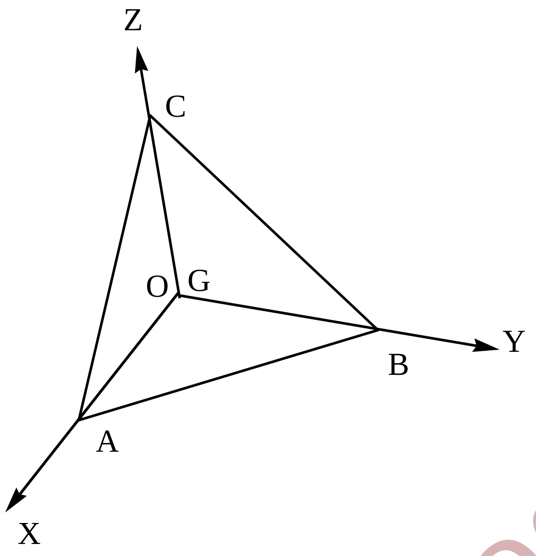
www.sakshieducation.com

14. ఒక తలం నిరూపకాక్షాలను A,B,C బిందువులలో ఖండిస్తుంది. ΔABC కేంద్రాభాసం (a,b,c) అయితే,తలం సమీకరణం $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$అని చూపండి.

సాధన. α,β,γ లు ABC ల సమతల నిరూపకాక్షాలను చేసే,అంతరఖండాలు అనుకుందాం.

అంతరఖండ సమతల సమీకరణము

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{y}{\beta}+\frac{z}{\gamma}=1 \qquad ....(1)$$



A,B,C ల నిరూపకాలు

$A(\alpha,0,0), B(0,\beta,0), C(0,0,\gamma)$

ΔABC యొక్క కేంద్రాభాసము G

G నిరూపకాలు $\left(\frac{\alpha}{3},\frac{\beta}{3},\frac{\gamma}{3}\right)=(a,b,c)$

$\frac{\alpha}{3}=a, \frac{\beta}{3}=b, \frac{\gamma}{3}=c$

(1) లో ప్రతిక్షేపిస్తే, ABC తల సమీకరణము

$$\frac{x}{3a}+\frac{y}{3b}+\frac{z}{3c}=1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3$$

www.sakshieducation.com

15. ZX- తలానికి సమాంతరంగా ఉండి $(0,4,4)$ బిందువు గుండాపోయే తలం సమీకరణం కనుక్కోండి.

సాధన. ZX తల సమీకరణము y = 0

సమాంతర సమతల సమీకరణము y=k

ఈ తలం $P(0,4,4)=4=k$ గుండా పోతుంది.

కావలసిన సమతల సమీకరణము $y=4$

16. (α,β,γ) బిందువు గుండాపోతూ $ax+by+cz=0$ తలానికి సమాంతరంగా ఉండే తలం సమీకరణం రాబట్టండి.

సాధన. దత్త సమతల సమీకరణము $ax+by+cz=0$

సమాంతర సమతల సమీకరణము $ax+by+cz=k$

ఈ తలం $P(\alpha,\beta,\gamma)$ గుండా పోతుంది.

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=K$$

$\therefore$ కావలసిన సమతల సమీకరణము

$ax+by+cz=a\alpha+b\beta+c\gamma$]

i.e., $a(x-\alpha)+b(y-\beta)+c(z-\gamma)=0$

17. $2x-y+2=6, x+3y+2z=7$ సమీకరణాలు సూచించే తలాల మధ్యకోణము $2x-y++6$ $x+y+2z=7$ సమతలాల మధ్యకోణము θ అయితే

$$\cos\theta=\frac{|a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}\sqrt{a_2^2+b_2^2+c_2^2}}$$

$$=\frac{|2.1+(-1).1+1.2|}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+1+4}}$$

$$=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}$$

$$\therefore\quad \theta=\frac{\pi}{3}$$

www.sakshieducation.com

18 సమతల సమీకరణం $x+2y-2z-9=0$ అని అభిలంబ రూపానికి కుదించి అభిలంబ రేఖ దిక్ కొసైన్లను మూలబిందువు నంచి సమతలానికి దూరాన్ని కనుక్కోండి.

సాధన. దత్త సమీకరణం $x+2y-2z-9=0$

స్థిర రాశిని కుడువైపు రాస్తే,

$x+2y-2z=9$ ....(1)

(1) లో x,y,z ల గుణకాల వర్గాల మొత్తానికి వర్గమూలం

$\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\pm 3$

$p=\mp\left(\frac{-9}{\pm 3}\right)=3$

(1) ± 3

$\pm\frac{1}{3}\times\pm\frac{2}{3}y\mp\frac{2}{3}z=\pm 3$

కుడువైపు స్థిరరాశి గుర్తు ధనాత్మకం అయ్యేలా సమీకరణం గుర్తు ఎంచుకృంటే, అభిలంబ రూపంలో తలం సమీకరణం

$\frac{x}{3}+\frac{2}{3}y-\frac{2}{3}z=3$ ....(2)

(2) అభిలంబ రేఖ దిక్ కొసైన్లు $\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$

మూలబిందువు నుంచి తలానికి లంబదూరం = 3 యూనిట్లు

19 ఒక సమతలం $X,Y,Z-$అక్షాలపై చేసే అంతర ఖండాలు వరుసగా 2,3,4 అయితే a,b,c లు వరుసగా X,Y,Z- అంతర ఖండాలుగా గల సమతల సమీకరణ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$అని చూపండి.

సాధన. సమతల సమీకరణం

$\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ నుంచి

లేదా $6x+4y+3z=12$

www.sakshieducation.com

20. (0, –1, 0), (2, 1, –1), (1, 1, 1), (3, 3, 0) బిందువులు సతలీయాలు అని చూపుము

Sol. A(0,-1,0) B(2,1,-1) c(1,1,1) ,D(3,3,0)

$(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ బిందువు ల గుండా పోయే తలం

¶ £ ÀOµ g 0 $$\begin{vmatrix} x-0 & y+1 & z-0 \\ 2-0 & 1+1 & -1-0 \\ 1-0 & 1+1 & 1-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y+1 & z \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x(2+2)-(y+1)(2+1)+z(4-2)=0$$

$$\Rightarrow 4x-3y+2z-3=0$$

D(3,3,0), ని ప్రతిక్షేపించగా 4.3 – 3.3 + 2.0 -3 =0 $\Rightarrow$ 12-9-3 =0 $\Rightarrow$ 0=0.

D , ABC. తలంపై న ఉంటుంది. బిందువులు సతలీయాలు

www.sakshieducation.com

సంకీర్ణ సంఖ్యలు

1. $z_1 = (3, 5), z_2 = (2, 6)$ అయితే $z.z_2$ కనుగొనుము

Solution : -

Given $z_1 = 3 + 5i \qquad z_2 = 2 + 6i$

$z_1 - z_2 = (3 + 5i)(2 + 6i) = 6 + 28^0 C + 30i^2 = 6 - 30 + 28i$

$z_1 \,.\, z_2 = -24 + 28i = (-24, 28)$

2. $(-6, 5) + (10, -4)$ కి సంకలన విలోమాలను వ్రాయండి.

3. $z_1 = (6, -3), z_2 = (2, -1)$ అయితే z_1 / z_2 కనుగొనుము

Solution : -

$z_1 = 6 + 3i \quad z_2 = 2 - i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{6 + 3i}{z - i} = \frac{(6 + 3i)(2 + i)}{4 - i^2} = \frac{8 + 12i + 3i^2}{5}$$

$$1 + \frac{12}{5} i = \left(1, \frac{12}{5}\right)$$

4. $z = \cos\theta + i\sin\theta$ అయితే $z - \frac{1}{2}$ కనుగొనుము

Solution : -

$$z = \cos\theta + i\sin\theta \frac{1}{z} = \frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} \times \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos\theta - i\sin\theta}$$

$$z - \frac{1}{z} = 2i\sin\theta$$

www.sakshieducation.com

5. **(i)** $(3,4)$ **(ii)** $(\sin\theta, \cos\theta)$ **(iii)** $(7,24)$ **(iv** $(-2,1)$ కి గుణకార విలోమాలను వ్రాయండి.

Solution : -

(i) L $z = 3+4i$

zగుణకార విలోమం$= \frac{1}{3+4i} = \frac{3-4i}{(3+4i)(3-3i)}$

$= \frac{3-4i}{25} = \left(\frac{3}{25}, \frac{-4}{25}\right)$

(ii) $z = \sin\theta + i\cos\theta$

zగుణకార విలోమం $z = \frac{1}{\sin\theta + 1\cos\theta} = \frac{\sin\theta - i\cos\theta}{(\sin\theta - i\cos\theta)}$

$= \frac{\sin\theta - i\cos\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = \sin\theta - i\cos\theta$

6. $\frac{4-2i}{1-2i}$ ని $a+ib$ రూపంలో వ్రాయండి

Solution: -

Let $\frac{4-2i}{1-2i} = a+ib$

$\frac{(4-2i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = a+ib \Rightarrow a+ib = \frac{4+6i-4i^2}{1-4i^2}$

$\therefore a+ib = \frac{8+6i}{5} \Rightarrow a = \frac{8}{5} \quad b = \frac{6}{5}$

www.sakshieducation.com

7. $a = \cos\alpha + i\sin\alpha$, $b = \cos\beta + i\sin\beta$ అయితే $\frac{1}{2}\left(ab + \frac{1}{ab}\right)$ కనుగొనుము

Solution : -

$$ab = (\cos\alpha + i\sin\alpha)(\cos\beta + i\sin\beta)$$

$$= \cos\alpha\cos\beta + i\sin\beta\cos\alpha + i\sin\alpha\cos\beta + i^2\sin\alpha\sin\beta$$

$$= (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)\ + i(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

$$ab = (\cos\alpha + \beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

$$\frac{a}{ab} = \frac{\cos(\alpha+\beta) - i\sin(\alpha+\beta)}{\{\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)\}\{\cos(\alpha+\beta) - \sin(\alpha+\beta)\}}$$

$$\frac{1}{ab} = \cos(\alpha+\beta) - i\sin(\alpha+\beta)$$

$$\frac{1}{2}\left(ab + \frac{1}{ab}\right) = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) + \cos(\alpha+\beta) - i\sin(\alpha+\beta)\right]$$

$$= \cos(\alpha+\beta)$$

8. $3 + 4i$ యొక్క వర్గ మూలాన్ని కనుగొనుము

Solution : -

$$\sqrt{3+4i} = x + iy$$

ఇరు వైపులా వర్గం చేయగా

$$3 + 4i = x^2 + i^2y^2 + 2ixy$$

$$3 + 4i = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

$$x^2 - y^2 = 3 : 2xy = 4$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{(x^2 - y^2) + 4x^2y^2}$$

$$= \sqrt{9+16} \Rightarrow x^2 + y^2 = 5 : x^2 - y^2 - y^2 = 3$$

$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$

$y^2 = y \Rightarrow y = \pm 1$

$\sqrt{3+4i} = \pm(2+i)$

9.. $z = 3 - 5i$ అయితే అ $z^3 - 10z^2 + 58z - 136 = 0$ అనిచూపుము

$z^3 = (3-5i)^3 = 3^3 - (5i)^3 - 3(3)(5i)(3-5i)$

$= 27 + 125i - 135i - 225 = -198 - 10i$

$z^2 (3-5i)^2 = 9 + 25i^2 - 30i = -16 - 30i$

L.H.S $= z^3 - 10z^2 + 58z - 136$

$= -198 - 10i - 10\{-16 - 30i\} + 58\{3 - 5i\} - 136$

$334 - 334 + 10i - 10i = 0 = RHS$

10. $x + iy = \dfrac{3}{2 + \cos\theta + i\sin\theta}$ అయితే $x^2 + y^2 = 4x - 3$ అనిచూపుము

Solution : - $x + iy = \dfrac{3\{2 + \cos\theta - i\sin\theta\}}{(2+\cos\theta)^2 - (i\sin\theta)^2} \Rightarrow x + iy = \dfrac{3\{2 + \cos\theta - \sin\theta\}}{4 + \cos^2\theta + 4\cos\theta + \sin^2\theta}$

$\therefore x + iy = \dfrac{3\{2 + \cos\theta - i\sin\theta\}}{5 + 4\cos\theta}$

$x = \dfrac{3(2+\cos\theta)}{5 + 4\cos\theta}$ $y = \dfrac{-3\sin\theta}{5 + 4\cos\theta}$

LHS $x^2 + y^2 = \left\{\dfrac{3(2+\cos\theta)}{5+4\cos\theta}\right\}^2 + \left\{\dfrac{-3\sin\theta}{5+4\cos\theta}\right\}^2$

$= \dfrac{9\{4 + \cos^2\theta + 4\cos\theta + \sin^2\theta\}}{(5 + 4\cos\theta)^2}$

www.sakshieducation.com

$$= \frac{9\{5+4\cos\theta\}}{(5+4\cos\theta)^2} = \frac{9}{5+4\cos\theta}$$

RHS $4x - 3 = \frac{12(2+\cos\theta)}{5+4\cos\theta} - 3 = \frac{24 + 12\cos\theta - 15 - 12\cos\theta}{5+4\cos\theta}$

$$RHS = \frac{9}{5+4\cos\theta}$$

$\therefore$ LHS = RHS

11 $, \frac{2-i}{(1-2i)^2}, \frac{-2-11i}{25}$, లు సంయుగ్మాలు అని చూపుము

Solution : -

$$a+ib+\frac{2-i}{(1-2i)^2} = \frac{2-i}{1+4i^2-4i}$$

$$= \frac{2-i}{-3-4i} \times \frac{-3+4i}{-3+4i} = \frac{-6+8i+3i-4i^2}{9-16i^2}$$

$$a+ib = \frac{-2+11i}{25}$$

$\frac{-2+11i}{25}$ యొక్క సంయుగ్మం $\frac{-2-11i}{25}$

www.sakshieducation.com

12. క్రింది వానిని మాప ఆయామ రూపంలో వ్రాయండి.

(I) $1-i$ **(ii)** $1+i\sqrt{3}$ **(iii)** $-\sqrt{3}+i$ **(iv)** $-1-i\sqrt{3}$

Solution : -

$1-i=r\{\cos\theta+i\sin\theta\}$

$r\cos\theta=1\, r\sin\theta=-\ 1$

$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=2\Rightarrow r=\sqrt{2}$

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\quad \sin\theta=-\frac{1}{\sqrt{2}}$

Principal value of $\theta=\pi/4\quad \{\because -\pi\le\theta\le\pi\}$

$\therefore 1-i=\sqrt{2}\left\{\cos i-\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin(-\pi/4)\right\}$

(ii) $1+i\sqrt{3}=r\{\cos\theta+i\sin\theta\}$

$\therefore r\ \cos\theta=1\quad r\ \sin\theta=\sqrt{3}$

$(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=1+\left(\sqrt{3}\right)^2$

$r^2=4\Rightarrow r=2$

$\cos\theta=\frac{1}{2}\sin\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ Principal value of $\theta=\frac{\pi}{3}$

$\therefore 1+i\sqrt{3}=2\left\{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\pi/3\right\}$

(iii) $-\sqrt{3}+i=r\{\cos\theta+i\sin\theta\}$

$r\cos\theta=-\sqrt{3}\quad r\sin\theta=1$

$(r\cos\theta)^2(r\sin\theta)^2=3+1\Rightarrow r=2$

www.sakshieducation.com

$\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore$ Principal value of $\theta = \frac{s\pi}{6}$

$\therefore -\sqrt{3} + i = 2\left\{\cos\frac{s\pi}{6} + i\sin\frac{s\pi}{6}\right\}$

(iv) $-1 - i\sqrt{3} = r\{\cos\theta + i\sin\theta\}$

$r\cos\theta = -1 \quad r\sin\theta = -\sqrt{3}$

$(r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2 = (-1)^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}; \sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Prove of $\theta = -2\pi/3$

$\therefore -1 - i\sqrt{3} = 2\left\{\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right\}$

13. $-2i(3+i)(2+4i)(1+i)$ ని సూక్ష్మీకరించి మాపవిలులను కనుగొనుము

Solution : -

$-2i\{3+i\}(2+4i)(1+i) = -2i(3+i)\{2+2i+4i+4i^2\}$

$= -2i(3+i)(-2+6i) = -2i\{-6+18i-2i-6\}$

$= -2i\{-12+16i\} = 24i - 32i^2 = 32 + 24i$

$|32 + 24i| = \sqrt{(32)^2 + (24)^2} = \sqrt{1024+576} = 40$

www.sakshieducation.com

14. $z \neq 0$ అయితే $Arg\ z + Arg\ \overline{z}$ కనుగొనుము

If $Arg\ z = \theta$ then $Arg\overline{z} = -\theta$

$\therefore Argz + Arg\ \overline{z} = \theta - \theta = 0$

15 $z_1 = -1\ and\ z_2 = -i$ అయితే $Arg\left(z_1\ z_2\right)$ కనుగొనుము

Solution: -

$z_1 = -1 \Rightarrow Argz_1 = \pi\ \{\because -1 = \cos\pi + i\sin\pi\}$

$z_2 = -i \Rightarrow Arg\ z_2 = -\pi/2\{\because -i = \cos-\pi/2 + 1\sin(-\pi/2)\}$

$Arg\left(z_1\ z_2\right) = Argz_1 + Arg\ z_2 = \pi - \pi/2 = \pi/2$

16 $z_1 = -1 : z_2 = i$ అయితే $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ కనుగొనుము

Solution : - $Argz_1 = \pi\ \{\because -1 = \cos\pi + 1\sin\pi\}$

$Arg\ z_2 = \pi/2\ \{\because i = \cos\pi/2 + i\sin\pi/2\}$

$Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Argz_1 - Argz_2 = \pi - \pi/2 = \pi/2$

17. ని సూక్ష్మీకరించి మాపవిలులను కనుగొనుము

(i) $\frac{(2+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$ **(ii)** $\frac{(1+i)^3}{(2+i)(1+2i)}$

Solution: $\frac{(2+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)} = \frac{-2+4i-4i-8}{-3+i-3i+i^2}$

$= \frac{-5}{-4-2i} = \frac{5}{2+i} = \frac{5(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{\cancel{5}(2-i)}{\cancel{5}}$

www.sakshieducation.com

$$\left|\frac{(2+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}\right| = |2-i| = \sqrt{5}$$

(ii) $$\frac{(1+i)^3}{(2+i)(1+2i)} = \frac{1+i^3+3i(1+i)}{2+5i+2i^2} = \frac{1-i+3i-3}{5i}$$

$$= \frac{-2+2i}{5i} \times \frac{5i}{5i} = \frac{-10i+10i^2}{25i^2}$$

$$\frac{-10-10i}{-25} = \frac{2+2i}{5}$$

$$\left|\frac{(1+i)^3}{(2+i)(1+2i)}\right| = \sqrt{\frac{4}{25}+\frac{4}{25}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$$

18. $(1-i)(2-i)(3-i)......(1-ni) = x = iy$ **అయితే** $2.5.10..................(1+n^2) = x^2+y^2$ **అనిచూపుము**

Solution: -

$$(1-i)(2-i)(3-i).......(1-ni) = x-iy$$

$$|(1-i)(2-i)(3-i).......(1-ni)| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\sqrt{2}\ \ \sqrt{5}\ \ \sqrt{10}\ ....\sqrt{1+n^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

ఇరు వైపులా వర్గం చేయుగా

$$2.5.10.......(1+n^2) = x^2+y^2$$

www.sakshieducation.com

19 $\frac{z+1}{z+i}$ యొక్క వాస్తవ భాగం 1 అయితే z బింధు పధం కనుగొనుము

Solution: - $z = x + iy$

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{x+iy+1}{x+iy+1}\right\} = 1 \Rightarrow \operatorname{Re}\frac{\{(x+1)+iy\}\{x-i(y+1)\}}{x^2+(y+1)^2} = 1$$

వాస్తవ భాగం 1

$$\frac{x(x+1) - i^2 iy(y+1)}{x^2+(y+1)^2} = 1$$

$$\cancel{x^2} + x + \cancel{y^2} + y = \cancel{x^2} + \cancel{y^2} + 2y + 1 \Rightarrow x - y = 1$$

20 **If** $z = x + iy \ and \ |z| = 1$ అయితే z బింధు పధం కనుగొనుము

Solution : -

$$|z| = 1 \Rightarrow |x+iy| = 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1$$

ఇరు పైపులా వర్గం చేయగా $x^2 + y^2 = 1$

21 $(z-1)$ యొక్క ఆయమం $\frac{\pi}{2}$ అయితే z బింధు పధం కనుగొనుము

Solution : -

Let $z = x + iy$ $Amp(z-1) = \pi/2$

Amp $\{x + iy - 1\} = \pi/2 \Rightarrow Amp\{(x-1)+iy\} = \pi/2$

$$\tan^{-1}\left(\frac{y}{x-1}\right) = \pi/2 \Rightarrow \frac{y}{x-1} = \frac{\sin\pi/2}{\cos\pi/2}$$

$$\Rightarrow x - 1 = 0$$

www.sakshieducation.com

22 **Arg** $\bar{z}_1$ **,** $Arg\ z_2$ లు వరుసగా $\frac{\pi}{5}, \frac{\pi}{3}$ అయితే $(Arg\ z_1 + Arg\ z_2)$ కనుగొనుము

Solution : -

$$Arg\left(\bar{z}_1\right) = \frac{\pi}{5} \Rightarrow Arg\ z_1 = -\pi/5$$

$$Arg\ z_2 = \pi/3 \quad Arg\ z_2 = \pi/3$$

$$\therefore Arg\ z_1 + Argz_2 = -\pi/5 + \pi/3 = \frac{-3\pi + 5\pi}{15} = \frac{2\pi}{15}$$

23. ఆర్గాండ్ తలం లో $(2+2i), -2-2i - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}\,i$ బిందువులు సమబహు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయనిచూపుము

Solution : -

$A(2,2)\ B(-2,-2)\ C\left(-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right)$ అనుకోండి.

$$AB = \sqrt{(2+2)^2 + (2+2)^2} = \sqrt{32}$$

$$BC = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}+2\right)^2 + \left(2\sqrt{3}+2\right)^2} = \sqrt{32}$$

$$CA = \sqrt{\left(-2\sqrt{3}-2\right)^2 + \left(2\sqrt{3}-2\right)^2} = \sqrt{32}$$

$$AB = BC = CA$$

ABC బిందువులు త్రిభుజాన్ని ఏర్పరుస్తాయి

www.sakshieducation.com

25 ఆర్గాండ్ తలం లో $7+7i, 7-7i$ బిందువు ల నుకలిపే రేఖ ను లంబ సమద్విఖండన రేఖ ను కనుగొనుముఏర్పరుస్తాయని చూపుము

Solution: -

A(7, 7) B (7, - 7) బిందువు లు $(7+7i)$ *and* $(7-7i)$ లను సూచిస్తాయనుకోండి.

AB ంమధ్య బిందువు $(7,0)$

$AB = \frac{-7-7}{7-7}$

AB వాలు $\frac{-7-7}{7-7}$

$\therefore$ లంబరేఖ వాలు= 0

లంబ సమద్విఖండన రేఖా సమీకరణం $(y-0)=0(x-7)$

$y=0$

25 ఆర్గాండ్ తలం లో $z+i, 4+3i, 2+5i, 3i$ బిందువులు చతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తాయనిచూపుము

Solution: -

$A(2,1)\ B(4,3)\ C(2,5)\ D(0,3)$

$AB = \sqrt{(4-2)^2+(3-1)^2} = \sqrt{8}$ $\quad BC = \sqrt{(2-4)^2+(5-3)^2} = \sqrt{8}$

$CD = \sqrt{(0-2)^2+(3-5)^2} = \sqrt{8}$ $\quad AD = \sqrt{(0-2)^2+(3-1)^2} = \sqrt{8}$

$AC = \sqrt{(4-2)^2+(5-1)^2} = 4$ $\quad BD = \sqrt{(0-4)^2+(3-3)^2} = 4$

$AB = BC = CD = AD$ *and* $AC = BD$

ABCD బిందువులు చతురస్రాన్ని ఏర్పరుస్తాయి

www.sakshieducation.com

26 ఆర్గాండ్ తలం లో $-2+7i, \frac{-3}{2}+\frac{1}{2}i, 4-3i, \frac{7}{2}(1+i)$ బిందువులు రాంబస్ ను ఏర్పరుస్తాయనిచూపుము

Solution ; -

$A(-2,7)\ BC\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)C(4,-3)\ D\left(\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$ces

$AB=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}+1\right)^2+\left(\frac{1}{2}-7\right)^2}=\sqrt{\frac{170}{4}}\ CD=\sqrt{\left(\frac{7}{2}-4\right)^2+\left(\frac{7}{2}+3\right)^2}=\sqrt{\frac{170}{4}}$

$BC=\sqrt{\left(4+\frac{3}{2}\right)^2+\left(-3-\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{170}{4}}$

$AD=\sqrt{\left(\frac{7}{2}+2\right)^2+\left(\frac{7}{2}-7\right)^2}=\sqrt{\frac{170}{4}}$

$AC=\sqrt{(4+2)^2+(-3-7)^2}=\sqrt{136}$

$AC=\sqrt{(4+2)^2+(-3-7)^2}=\sqrt{136}$

$AB=BC=CD=AD$ and $AC\neq BD$

ABCD బిందువులు రాంబస్ ను ఏర్పరుస్తాయి

www.sakshieducation.com

ప్రమేయాలు

1. **$f:A\to B, g:B\to C$ లు అన్వేక ప్రమేయాలు అనుకుందాం. అప్పుడు $gof:A\to C$ కూడా అన్వేకం అవుతుంది అని నిరూపింపుము.**

సాధన:

$f:A\to B, g:B\to C$ లు అన్వేకాలు

$\therefore gof:A\to C$

gof అన్వేకం అని చూపటానికి

$a_1, a_2, \in A$ అనుకొనుము.

$\therefore f(a_1), f(a_2)\in B$ మరియు $g(f(a_1)),$

$g(f(a_2))\in C$ అనగా $(gof)(a_1), gof(a_2)\in C$

ఇప్పుడు $(gof)(a_1)=gof(a_2)$

$\Rightarrow g(f(a_1))=g(f(a_2))$

$\Rightarrow f(a_1), f(a_2)(\because g$ అన్వేకం)

$a_1=a_2(\because f$ అన్వేకము)

అందువలన $gof:A\to C$ అన్వేక ప్రమేయము.

2. **$f:A\to B, g:B\to C$ లు సంగ్రస్త ప్రమేయాలు అనుకుందాం. అప్పుడు $gof:A\to C$ సంగ్రస్త ప్రమేయం అగును అని నిరూపించుము.**

సాధన:

$c\in C$ అనుకుందాం. $g:B\to C$ సంగ్రస్త ప్రమేయం

కాబట్టి $g(b)=c$ అయ్యేటట్లు $b\in B$ వ్యవస్థితం.

$f:A\to B$ సంగ్రస్తం కనుక, $f(a)=b$ అయ్యేటట్లు $a\in A$ ఉంటుంది.

$\therefore c=g(b)=g(f(a))=(gof)(a)$

$\therefore c\in C\Rightarrow (gof)(a)=c$ అయ్యేలా $a\in A$ వ్యవస్థితం.

కనుక $gof:A\to C$ సంగ్రస్తం.

3. **$f:A\to B, g:B\to C$ లుద్విగుణ ప్రమేయాలు అనుకుందాం.అప్పుడు $gof:A\to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం అగును అని నిరూపించుము.**

సాధన: 1 ,2

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

4 $f:A\rightarrow B, g:B\rightarrow C\Rightarrow gof:A\rightarrow C$ **అనుకుందాం.** $ho(gof)=(hog)of$ **అని నిరూపించుము.**

సాధన:

$f:A\rightarrow B$ మరియు $g:B\rightarrow C\Rightarrow gof:A\rightarrow C$ ఇప్పుడు $gof:A\rightarrow C$ మరియు $h:C\rightarrow D$

$\Rightarrow ho(gof):A\rightarrow D$

అదే విధంగా $(hog)of:A\rightarrow D$

అందువలన $ho(gof)$ మరియు $(hog)of$ ప్రమేయాలు ఒకే ప్రదేశాన్ని, ఒకే సహప్రదేశాన్ని కలిగి ఉన్నాయి.

$a\in A$. అనుకుందాం.

$$[ho(gof)](a)=h[(gof)(a)]=h[g(f(a))]$$
$$=(hog)[f(a)]=[(hog)of](a)$$

$\therefore ho(gof)=(hog)of$

5 $f:A\rightarrow B, I_A, I_B$ **లు తత్సమ ప్రమేయాలు అయిన** $foI_A=f=I_B$ **అని చూపండి.**

సాధన:

$f:A\rightarrow B$ అనుకుందాం. I_A, I_B లు A,B లలో తత్సమ ప్రమేయాలైతే $foI_A=I_Bof=f$

$I_A:A\rightarrow A< f:A\rightarrow B$ కనుక A నుంచి B కి foI_A ప్రమేయం.

$f:A\rightarrow B, I_B:B\rightarrow B$ కనుక A నుంచి B కి I_Bof ప్రమేయం.

foI_A, f, I_Bof ప్రమేయాలకు ప్రదేశం A

అప్పుడు $(foI_A)(a)=f(I_A(a))=f(a)[\because I_A(a)=a]$

$\forall a\in A$ కి

$\therefore foI_A=f \qquad -(1)$

$(I_Bof)(a)=I_B(f(a))=f(a)\forall a\in A$

$\therefore I_Bof=f \qquad -(2)$

$(1),(2)$ ల నుంచి $foI_A=f=I_Bof$.

6 A,B **లు శూన్యేతర సమితులు.** $f:A\rightarrow B$ **ద్విగుణమైతే,** $f^{-1}:B\rightarrow A$ **ద్విగుణం అని నిరూపించుము.**

సాధన:

$f:A\rightarrow B$ అన్వేకం అనుకుందాం.

స్పష్టంగా $f(A)$ నుంచి A కి f^{-1} ఒక సంబంధం.

$b\in f(A)$ అనుశీరిందాం. f అన్వేకం కనుక $f(a)=b$ అయ్యేటట్లు A లో ఒకే ఒక మూలకం a ఉంటుంది.

అందువల్ల ఇచ్చిన $b\in f(A)$ కు $(a,b)\in f$ అయ్యేటట్లు A లో ఒకే ఒక మూలకం a ఉంటుంది.

అందువల్ల ఇచ్చిన $b\in f(A)$ కు $(b,a)\in f^{-1}$ అయ్యేటట్లు ఒకే ఒక $a\in A$ ఉంటుంది. అందువల్ల

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

$f(A)$ నుంచి A కు f^{-1} ఒక ప్రమేయం. ఇంకా $f^{-1}(b) = a \Rightarrow f(a) = b$ స్పష్టంగా f^{-1} సంగ్రస్త ప్రమేయం.

$b_1, b_2 \in f(A)$ అయి $f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2) = a$

అనుకుందాం. అప్పుడు $b_1 = f(a) = b_2$

అందువల్ల f^{-1} అన్వేకం, అందువల్ల $f^{-1}: B \to A$ ద్విగుణం.

7 $f: A \to B$ **ద్విగుణ ప్రమేయం అనుకుందాం. అప్పుడు** $fof^{-1} = I_g, f^{-1}of = I_A$ **అని నిరూపించుము.**

సాధన: A నుండి B కి f ద్విగుణ ప్రమేయం కనుక B నుంచి A కి f^{-1} ద్విగుణ ప్రమేయం. అందువల్ల B నుంచి B కి fof^{-1} ద్విగుణం. ఇలాగే A నుంచి A కి $f^{-1}of$ ద్విగుణం. B నుంచి B కి I_B ద్విగుణ ప్రమేయం. A నుంచి A కి I_A ద్విగుణం అని తెలుసు. fof^{-1}, I_B ప్రమేయాల ప్రదేశం ఒక్కటే. అది $B.b \in B$ అనుకుందాం. $f^{-1}(b) = a$ అనుకుందాం. అప్పుడు

$a \in A, f(a) = b$.

ఇంకా $(fof^{-1})(b) = f(f-1(b))$

$= f(a) = b = I_B(b)$

అంటే $(fof^{-1})(b) = I_B(b)$

కనుక $fof^{-1} = I_B$

$f^{-1}of, I_A$ ప్రమేయాలకు ప్రదేశం A

$x \in A$ అనుకుందాం.

$f(x) = y$ అనుకుందాం.

అప్పుడు $y \in B, f^{-1}(y) = x$

ఇంకా $(f^{-1}of)(x) = f^{-1}(f(x))$

$= f^{-1}(y) = x = I_A(x)$

అంటే $(f^{-1}of)(x) = I_A(x)$

అందువల్ల $f^{-1}of = I_A$.

8 $f: A \to B, g: B \to A, gof - I_A, fog = I_B$ **అనుకుందాం. అప్పుడు** f **ద్విగుణ ప్రమేయం మరియు** $g = f^{-1}$ **అని నిరూపించుము.**

సాధన: $i)$ f అన్వేక ప్రమేయమని చూపిద్దాం.

$a_1, a_2 \in A$ అనుకుందాం.

$f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow g[f(a_1)] = f[f(a_2)]$

$\Rightarrow (gof)(a_1) = (gof)(a_2))$

$\Rightarrow a_1 = a_2 [\therefore gof]$

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

$\therefore f$ అన్వేక ప్రమేయం

ii) f సంగ్రస్త ప్రమేయమని చూపిద్దాం.

$b \in B$ అనుకొందాం.

$\therefore b = I_B(b) = fog(b)$

$\Rightarrow b = f\{g(b)\} \Rightarrow f\{g(b)\} = b$

f ప్రమేయం ద్వారా b కొరకు $g(b) \in A$ అయ్యే విధంగా ఒక పూర్వ ప్రతిబింబము వ్యవస్థితము.

$\therefore f$ అన్వేకము మరియు సంగ్రస్తము

$\therefore f$ ద్విగుణ ప్రమేయం

iii) $g = f^{-1}$ ఇప్పుడు అని చూపిద్దాం

$g = f^{-1}$ ప్రమేయాలు ఒకే ప్రదేశం B ని కలిసి ఉన్నాయి.

$n = \in B, g(b) = a$ అనుకుందాం. అప్పుడు $a \in A$,

$f(a) = f(g(a)) = I_B 9b) = b$ కనుక $f^{-1}.(b) = a$

ఇందువల్ల అన్నీ $b \in B$ కు

$g(b) = f^{-1}(b)$ కాబట్టి $g = f^{-1}$

9. $f : A \to B, g : B \to C$ **లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు అనుకుందాం. అప్పుడు** $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ **అని నిరూపించుము.**

సాధన: $f : A \to B, g : B \to C$ లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు. కనుక A నుంచి B కి gof ద్విగుణ ప్రమేయం.

అందువల్ల $(gof)^{-1}, C$ నుంచి A కి ద్విగుణ ప్రమేయం, ఇంకా $f^{-1} : B \to A, g^{-1} : C \to B$ లు కూడా ద్విగుణ ప్రమేయాలు.

అందువల్ల C నుంచి A కు $f^{-1}og^{-1}$ ద్విగుణ ప్రమేయం. $(gof)^{-1}, f^{-1}og^{-1}$ ప్రమేయాల ప్రదేశం C అవుతుంది.

$c \in C$ అనుకుందాం. $g^{-1}(c) = b$ అనుకుందాం. అప్పుడు $b \in B, g(b) = c. f^{-1}(b) = a$ అనుకుందాం.

అప్పుడు $a \in A, f(a) = b$

$(f^{-1}og^{-1})(c) = f^{-1}(g^{-1}(c)) = f^{-1}9b) = a \quad -(1)$

ఇంకా $(gof)(a) = g(f(a)) = g(b) = c \quad -(2)$ అందువల్ల

$(gof)^{-1}(c) = a$

$(1),(2)$ ల నుండి

$(gof)^{-1}(c) = (f^{-1}og^{-1}(c)$

కనుక $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

www.sakshieducation.com

అభ్యాసం

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

. 1. $f(x)=\begin{cases} x+2, x>1 \\ 2, -1\le x\le 1 \\ x-1, -3<x<-1, \end{cases}$ **గా నిర్వచిస్తే. కింది విలువలు కనుక్కోండి.**

$i)\, f(3),\ ii)\, f(0),\ iii)\, f(-1,5),$
$iv)\, f(2)+f(-2), v)\ f(-5)$

సాధన:

$i)\quad f(3)$

$x>1, \quad f(x)=x+2$

$\therefore f(3)=3+2=5$

$ii)\quad f(0)$

$-1\le x\le 1, \quad f(x)=2$

$\therefore f(0)=2$

$iii)\quad f(-1,5)$

$-3<x<-1, \quad f(x)=x-1$

$\therefore f(-1,5)=-1.5-1=-2.5$

$iv)\quad f(2)+(f-2)$

$x>1, \quad f(x)=x+2$

$\therefore f(2)=2+2=4$

$-3<x<-1, \quad .\ f(x)=x-1$

$\therefore f(-2)=-2-1=-3$

$\therefore (2)+f(-2)=4+(-3)=1$

$v)\quad f(-5)$

$\{x/x\in(-3,\infty)\}\quad f(-5)$

$v)\quad f(-5)$

f ప్రదేశం $\{x/x\in(-3,\infty)\}$ కనుక $f(-5)$ నిర్వచితం కాదు.

2. $f:R-\{\pm1\}\to R$ **ను** $f(x)=\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$ **గా నిర్వచిస్తే,** $f\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)=2f(x)$ **అని చూపండి.**

సాధన: $f(x)=\log\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

www.sakshieducation.com

$$f\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \log\left|\frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}}\right| = \log\left|\frac{x^2++2x}{x^2+1-2x}\right|$$

$$= \log\left|\frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}\right| = \log\left|\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2\right|$$

$$= 2\log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = 2f(x)$$

3. $A=\{-2,-1,-,1,2\}$, $f:A\to B$ **సంగ్రస్త ప్రమేయం** $f(x)=x^2+x+1$ **గా నిర్వచిస్తే B ని కనుక్కోండి.**

సాధన: f - వ్యాప్తి

$$f(A)=\{f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(2)\}$$

$$f(x)=x^2+x+1$$

$$f(-2)=(-2)^2-2+1=4-2+1=3$$

$$f(-1)=(-1)^2-1+1=1-1+1=1$$

$$f(0)=(0)^2-0+1=1$$

$$f(1)=1^2+1+1=3$$

$$f(2)=2^2+2+1=4+2+1=7$$

f వ్యాప్తి $f(A)=\{1,3,7\}$

f సంగ్రస్తము కావున $f(A)=B$

$\therefore\ B=\{3,1,7\}$

www.sakshieducation.com

4. $f:R\to R$ **ను** $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$ **గా నిర్వచిస్తే,** $f(1-x)=1-f(x)$ **అని చూపండి.**

సాధన: $f(x)=\dfrac{4^x}{4^x+2}$

$$f(1-x)=\frac{4^{1-x}}{4^{1-x}+2}=\frac{\frac{4}{4^x}}{\frac{4}{4^x}+2}$$

$$=\frac{4}{4+2.4^x}=\frac{2}{2+4^x} \quad .... (1)$$

$$1-f(x)=1-\frac{4^x}{4^x+2}=\frac{4^x+2-4^x}{4^x+2}$$

$$=\frac{2}{2+4^x} \quad ...... (2)$$

(1) మరియు (2) ల నుండి $\boxed{f(1-x)=1-f(x)}$

5. $f:\{-1,1\}\to\{0,2\}$ **సంగ్రస్తం; $f(x)=ax+b$ గా నిర్వచిస్తే a మరియు b విలువలు కనుక్కోండి.**

సాధన: f ప్రదేశము $=\{-1,1\}$ మరియు $f(x)=ax+b$

$\therefore\ f(-1)=-a+b,\ f(1)=a+b$

సందర్భము - **I :**

$f=\{(-1,0),(1,2)\}$ .... (1) మరియు

$f=\{(-1,(-a+b)),(1,(a+b))\}$ .... (2)

అనుకొనుము

(1) మరియు (2) ల నుండి

$-a+b=0$ మరియు $a+b=2$

$a=b \qquad \Rightarrow b+b=2\ (\because a=b)$

$\Rightarrow 2b=2$

$\boxed{b=1}\ ;\ \boxed{a=1}$

సందర్భము - **II :**

$f=\{(-1,2),(1,0)\}$ .... (3)

$f=\{(-1,a+b),(1,a+b)\}$ .... (4)

(3) మరియు (4) ల నుండి

www.sakshieducation.com

$= a+b=2,\ a+b=0$ www.sakshieducation.com

$b=-a$

$\therefore\ -a-a=2$

$\Rightarrow -2a=2$

$\Rightarrow\ a=-1$

$\Rightarrow\ b=-(-1)=1$

$\therefore\ \boxed{a=-1}\ ;\ \boxed{b=1}$

6. $f:R-\{0\}\to R$ **ను** $f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}$ **గా నిర్వచిస్తే,** $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$ **అని చూపండి.**

సాధన: $f(x)=x^3-\frac{1}{x^3}$ ___ (1)

ఇప్పుడు $f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(\frac{1}{x}\right)^3-\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^3}=\frac{1}{x^3}-x^3$ ___ (2)

(1),(2)లను కలుపగా

$f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\left(x^3-\frac{1}{x^3}\right)+\left(\frac{1}{x^3}-x^3\right)=0$

$\therefore\ f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$

7. $f(x)=\cos(\log x)$ **అయితే**

$f\left(\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{y}\right)+f(xy)\right]=0$ **అని చూపండి.**

సాధన: $f(x)=\cos(\log x)$

$f\left(\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{y}\right)=\cos\left(\log\frac{1}{x}\right)\cos\left(\log\frac{1}{y}\right)$

$=\cos\left(\log x^{-1}\right)\cos\left(\log y^{-1}\right)$

$=\left[-\cos(\log x)\right]\left[-\cos(\log y)\right]$

$=\cos(\log x)\cos(\log y)$

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

$\therefore\ f\left(\frac{1}{x}\right)\ f\left(\frac{1}{y}\right)=\cos(\log x)\cos(\log y)$ .... (1)

మరియు $\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{y}\right)+f(xy)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\cos\left(\log\frac{x}{y}\right)+\cos\log(xy)\right]$

$=\frac{1}{2}\left[\cos(\log x-\log y)+\cos(\log x+\log y)\right]$

$=\frac{1}{2}.2\cos(\log x)\cos(\log y)\ \left[\because\ \cos(A-B)+\cos(A+B)=2\cos A\cos B\right]$

$=\cos(\log x)\cos(\log y)$

$\therefore\ \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{y}\right)+f(xy)\right]=\cos(\log x)\cos(\log y)$ ..(2)

(1) - (2)

$f\left(\frac{1}{x}\right)f\left(\frac{1}{y}\right)-\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{x}{y}\right)+f(xy)\right]=0$

8. $f:R\to R\ f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$**, గా నిర్వచిస్తే,** $f(\tan\theta)=\cos 2\theta$ **అని చూపండి.**

సాధన: $f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$

ఇప్పుడు $(\tan\theta)=\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

$=\frac{1-\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

$=\frac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=\frac{\cos 2\theta}{(1)}$

$\therefore\ f(\tan\theta)=\cos 2\theta$

9. $f(x+y)=f(xy)\ \forall\ x,y$ **అయితే** f **స్థిరప్రమేయం అని చూపండి.**

సాధన: ఇచ్చిన $f(x+y)=f(xy), x,y\in R$

$x=y=0$ అనుకొంటే

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow f(0) = f(0)$ ____(1)

అప్పుడు $x = 1, y = 0$

$\Rightarrow f(1) = f(0)$ ____(2)

$Let\, x = 1, y = 1$

$f(2) = f(1)$ ____(3)

(1)(2)(3) నుండి

$f(0) = f(1) = f(2)$

$\Rightarrow f(0) = f(2)$

$\Rightarrow f(3) = f(0)$

$\Rightarrow f(4) = f(0)$

:

:

$f(n) = f(0)$

$\therefore f$ అనునది స్థిర ప్రమేయము.

10. $f(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ **మరియు** $g(y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ **అయితే** $(fog)(y) = y$ **అని చూపండి.**

సాధన: $f(y) = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ మరియు $g(y) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

$$\therefore (fog)(y) = f\{g(y)\} = f\left[\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right]$$

$$= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \Bigg/ \sqrt{1-\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)^2}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{1+y^2}} \times \frac{\sqrt{1+y^2}}{1+y^2-y^2} = y$$

$$\therefore fog(y) = y$$

11. $f: R \to R$ మరియు $g: R \to R$ లను $f(x) = 2x^2 + 3$ మరియు $g(x) = 3x - 2$ నిర్వచిస్తే

(i) $fog(x)$ (ii) $(gof)(x)$

(iii) $fof(0)$ (iv) $go(fof)(3)$ లను కనుగొనుము.

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

సాధన: i) $fog(x) = f[g(x)]$ www.sakshieducation.com

$= f(3x-2)$

$= 2(3x-2)^2 + 3$

$= 2[9x^2 + 4 - 12x] + 3$

$= 18x^2 + 8 - 24x + 3$

$\therefore (fog)(x) = 18x^2 - 24x + 11$

ii) $(gof)(x) = g\{f(x)\}$

$= g(2x^2 + 3)$

$= 3(2x^2 + 3) - 2$

$6x^2 + 9 - 2$

$= 6x^2 + 7$

$\therefore\ gof(x) = 6x^2 + 7$

iii) $fof(0) = f\{f(0)\}$

$= f\{2(0)^2 + 3\}$

$= f(3)$

$= 2(3)^2 + 3$

$= 2 \times 9 + 3 = 18 + 3 = 21$

$\therefore\ fof(0) = 21$

iv) $go(fof)(3) = gof\{f(3)\}$

$= gof(21)$

$= g\{f(21)\}$

$= g\{2(21)^2 + 3\}$

$= g\{2(441) + 3\}$

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

$= g\{882+3\}$

$= g(885)$

$= 3(885)-2$

$= 2655-2 = 2653$

$\therefore\ go(fof)(3) = 2653$

12. $f(x) = 2,\ g(x) = x^2, h(x) = 2x\ \forall\ x \in R$, అయితే $[fo(goh)(x)]$ కనుక్కోండి.

సాధన: $[fo(goh)(x)] = fog[h(x)]$

$= fog(2x)$

$= f[g(2x)] = f(4x^2) = 2$

$\therefore\ fo(goh)(x) = 2$

13. $f = \{(1,a),(2,c),(4,d),(3,b)\}$ మరియు

$g^{-1} = \{(2,a),(4,b),(1,c),(3,d)\}$ అయితే

$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ అని చూపండి.

సాధన: $f = \{(1,a),(2,c),(4,d),(3,b)\}$

$\Rightarrow f^{-1} = \{(a,1),(c,2),(d,4),(b,3)\}$

$g^{-1} = \{(2,a),(4,b),(1,c),(3,d)\}$

$\Rightarrow g^{-1} = \{(a,2),(b,4),(c,1),(d,3)\}$

L.H.S : $gof = \{(1,2),(2,1),(4,3),(3,4)\}$

$gof^{-1} = \{(2,1),(1,2),(3,4),(4,3)\}$

R.H.S : $f^{-1}og^{-1} = \{(2,1),(4,3),(1,2),(3,4)\}$

L.H.S = R.H.S

14. $f:R\to R,\ g:R\to R$ లను $f(x) = 2x-3,\ g(x) = x^3+5$ అయితే $(fog)^{-1}(x)$ కనుక్కోండి.

సాధన: $f(x) = 2x-3$ మరియు $g(x) = x^3+5$

www.sakshieducation.com

$fog(x) = f\{g(x)\}$

$= f(x^3+5)$

$= 2(x^3+5)-3$

$= 2x^3+10-3$

$= 2x^3+7$

$\therefore\ fog(x) = 2x^3+7$

$y = \log(x)$ అనుకొనుము

$y = 2x^3+7$

$x^3 = \frac{y-7}{2}$

$x = \sqrt[3]{\frac{y-7}{2}}$

$\therefore\ (fog)^{-1}(x) = \sqrt[3]{\frac{y-7}{2}}$

$\therefore\ (fog)^{-1}(x) = \left(\frac{x-7}{3}\right)^{1/3}$

15. $A = \{x / -1 \le x \le\}, f(x) = x^2, g(x) = x^3$**, గా నిర్వచిస్తే, కింది ప్రమేయాలలో ఏవి సంగ్రహిస్తాయి?**

$i)\ f : A \to A \quad ii) g : A \to A$

సాధన: $i)\ f : A \to A$

$\therefore A = \{x / -1 \le x \le\}, f(x) = x^2$

$\Rightarrow f(x)$ అనేది A నుంచి Aకు ప్రమేయం

$(i.e.,) f : A \to A$

$y \in A$ అనుకొందాం.

$f(x) = y$ అయ్యేటట్లుగా $x^2 = y$ అవుతుంది.

$\Rightarrow x = \sqrt{y}$

$y = -1$ అయితే $x = \sqrt{-1} \notin A$

కనుక $f : A \to A$ సంగ్రస్త ప్రమేయం కాదు.

$ii)\ g : A \to A$

$\therefore A = \{x / -1 \le x \le 1\}. g(x) = x^3$

$\Rightarrow g : A \to A$

$y \in A$ అనుకొందాం.

అప్పుడు $g(x) = y \Rightarrow x^3 = y$

$\Rightarrow x = y^{\frac{1}{3}} \in A$

$y = -1$ అయితే $x = -1 \in A$

$y = 0$ అయితే $x = 0 \in A$

$y = 1$ అయితే $x = 1 \in A$

$\therefore g : A \to A$ సంగ్రస్త ప్రమేయం

16. కింది వాటిలో ఏవి సంగ్రస్తం, అన్వేకం, ద్విగుణం అవుతాయో నిర్ణయించండి.

$i)\ f : R \to f(x) = \dfrac{2x+1}{3}$ **గా నిర్వచించాం.**

సాధన:

$$f(x) = \frac{2x+1}{3}$$

$x_1, x_2 \in R$

$\therefore f(x_1) = f(x_2)$

$$\Rightarrow \frac{2x_1+1}{3} = \frac{2x_2+1}{3}$$

$\Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$

$\Rightarrow 2x_1 = 2x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \forall x_1, x_2 \in R$

$f(x) = \dfrac{2x+1}{3}, f : R \to R$ అన్వేకం

ప్రతీ $y \in R$ (సహప్రదేశం)కు, $y = \dfrac{2x+1}{3}$

$\Rightarrow x = \dfrac{3y-1}{2} \in R$ వ్యవస్థితం

$$f(x) = \frac{2x+1}{3}$$

$$= \frac{2\left(\frac{3y-1}{2}\right)+1}{3} = y$$

$\therefore f : R \to R$ సంగ్రస్తం

www.sakshieducation.com

$\therefore f: R \to R,$ కు $f(x) = \frac{2x+1}{3}$ ద్విగుణ ప్రమేయం

$ii)$ $f: R \to (0,\infty)$ **ను** $f(x) = 2^x$ **గా నిర్వచించాం.**

సాధన:

$x_1, x_2 \in R$

$\therefore f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow 2^{x_1} = 2^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \; \forall \, x_1, x_2 \in R$

$\therefore f(x) = 2^x, f: R \to (0,\infty)$ అన్వేకం

$y \in (0,\infty), y = 2^x \Rightarrow x = \log_2(y)$

అప్పుడు $f(x) = 2^x$

$= 2^{\log_2(y)} = y$

$\therefore f: R \to (0,\infty)$ సంగ్రస్తం

$\therefore f: R \to (0,\infty)$ $f(x) = 2^x$ ద్విగుణ ప్రమేయం.

$iii)$ $f: (0,\infty) \to R$ **ను** $f(x) = \log_e x$ **గా నిర్వచించాం.**

సాధన:

$x_1, x_2 \in (0,\infty)$

$\therefore f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow \log_e(x_1) = \log_e$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

$\therefore f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2 \forall x_1, x_2 \in (0,\infty)$

$\therefore f(x)$ అన్వేకం

$y \in R$

$y = \log_e x \Rightarrow x = e^y$

అప్పుడు $f(x) = \log_e x$

$= \log_e(e^y) = \log_e e = y(1) = y$

$\therefore f: (0,\infty) \to$ సంగ్రస్తం

$\therefore F$ ద్విగుణ ప్రమేయం.

$iv)$ $(0,\infty) \to [0,\infty)$ **ను** $f(x) = x^2$ **గా నిర్వచించాం.**

సాధన:

$x_1, x_2 \in (0,\infty)(i.e.,) f$ ప్రదేశం.

$f(x_1) = f(x_2)$

$\Rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\Rightarrow x_1 = x_2 \qquad \therefore x_1, x_2 \geq 0$

www.sakshieducation.com

$\therefore f(x)=x^2, f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ అన్వేకం

$y\in(0,\infty)$, (సహప్రదేశం)కు

$y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}, \quad \therefore y\ge 0$

అప్పుడు $f(x)=x^2$

$$=\left(\sqrt{y}\right)^2=y$$

$\therefore f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ సంగ్రస్తం

$\therefore f$ ద్విగుణ ప్రమేయం

$v)$ $f:R\to[0,\infty)$ ను $f(x)=x^2$ గా నిర్వచించాం.

సాధన:

$x_1,x_2\in R$

$f(x_1)=f(x_2)$

$\Rightarrow x_1^2=x_2^2$

$\Rightarrow x_1=\pm x_2, \qquad \therefore x_1,x_2\in R$

f అన్వేకం కాదు.

$y\in[0,\infty)$

$y=x^2 \Rightarrow x=\sqrt{y}, y\in[0,\infty)$

అప్పుడు $f(x)=x^2$

$$=\left(\sqrt{y}\right)^2$$

$$=y$$

$\therefore f:R\to(0,\infty)$ సంగ్రస్త.

కనుక f ద్విగుణ ప్రమేయం కాదు.

$vi)$ $f:R\to R$ ను $f(x)=x^2$ గా నిర్వచించాం.

సాధన.

$x_1,x_2\in R(f$ ప్రదేశం)

$\therefore f(x_1)=f(x_2)$

$\Rightarrow x_1^2=x_2^2$

$\Rightarrow x_1=\pm x_2, \qquad \therefore x_1,x_2\in R$

$\therefore f(x)$ అన్వేకం కాదు.

$(-\infty,0)$ సహప్రదేశంలో ఉన్న మూలకానికి పూర్వబింబం లేదు. కనుక f సంగ్రస్తం కాదు.

$\therefore f$ ద్విగుణ ప్రమేయం కాదు.

www.sakshieducation.com

17. $f(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\sqrt{x}$ **అయితే** $x\in(0,\infty)$ **కు** $(gof)(x)$ **కనుక్కోండి.**

సాధన:

$$f(x)=\frac{1}{x}, g(x)=\sqrt{x}, \forall x\in(0,\infty)$$

$$(gof)(x)=g(f(x))$$

$$=g\left(\frac{1}{x}\right), \therefore f(x)=\frac{1}{x}$$

$$-\sqrt{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}, \therefore g(x)=\sqrt{x}$$

$$\therefore (gof)(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$$

18. $f(y)=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, g(y)=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$ **అయితే** $(fog)(y)=y$ **అని చూపండి.**

సాధన: $f(y)=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}, g(y)=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$

ఇప్పుడు

$$(fog)(y)=f(g(y)$$

$$=f\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right), \therefore g(y)=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$=\frac{\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\right)}}, \therefore f(y)=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}$$

$$=\frac{y}{\sqrt{1+y^2)-y^2}}=y$$

$$\therefore (fog)(y)=y$$

19. $f(x)=1+x+x^2+.........(x)<1$ **అయితే** $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{x}$ **అని చూపండి.**

సాధన: $f(x)=1+x+x^2+.........$

www.sakshieducation.com

$a = 1, r = x \qquad 5_{\infty} = \frac{a}{1-r}$

$f(x) = \frac{1}{1-x}$

$f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$

$\frac{1}{1-x} = y$

$\frac{1}{y} = 1 - x \Rightarrow x = 1 - \frac{1}{y}$

$x = \frac{y-1}{y}$

$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y}$

$f^{-1}(y) = \frac{x-1}{x}$

20.కింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల ప్రదేశాలు కనుక్కోండి.

a) $i) \quad f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(x+3)}$

సాధన:

$f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(x+3)} \in R$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x+3) \neq 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x+3) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -1, 1, -3$

$\therefore f$ ప్రదేశం $= R - \{-1, 1, -3\}$

$ii) \quad f(x) = \frac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$

సాధన:

$f(x) = \frac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)} \in R$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq 1, x \neq 2, x \neq 3$

$\therefore f$ ప్రదేశం $= R - \{1, 2, 3\}$

కింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాలకు ప్రదేశాలు కనుక్కోండి.

$i) \quad f(x) = \sqrt{x^2-3x+2}$

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

సాధన:

$f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}\in R$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\geq 0$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup[2,\infty]$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R-(1,2)$

$ii)\quad f(x)=\log(x^2-4x+3)$

సాధన:

$f(x)=\log(x^2-4x+3)\in R$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3>$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)>0$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(3,\infty)$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R-[1,3]$

$iii)\quad f(x)=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{[x]+2}}$

సాధన:

$f(x)=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{[x]+2}}\in R$

సందర్భం $(i)4-x^2\geq 0$ మరియు $[0]+2>0$

(లేదా)

సందర్భం $(ii)4-x^2\geq 0,[0]+2>0$

సందర్భం $(i)4-x^2\geq 0,[0]+2>0$

$\Leftrightarrow (2-x)(2+2)\geq 0,[x]>-2$

$\Leftrightarrow x\in[-2,2],x\in[-1,\infty]$

$\Leftrightarrow x\in[-1,2] \qquad -(1)$

సందర్భం (ii)

$4-x^2\leq 0$ మరియు $[x]+2<0$

$\Leftrightarrow (2+x)(2-x)\leq 0,[x]<-2$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup[2,\infty],x\in(-\infty,-2)$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2) \qquad -(2)$

$(1),(2)$ ల నుండి

f ప్రదేశం $(-\infty,-2)\cup[-1,2]$

www.sakshieducation.com
www.sakshieducation.com

iv) $f(x)=\frac{1}{x+|x|}$

సాధన:

$$f(x)=\frac{1}{x+|x|}\in R$$

$\Leftrightarrow x+|x|\neq 0$

$\Leftrightarrow x\in(0,\infty)$

$\therefore |x|=x_1$ అయినప్పుడు $x\geq 0$

$|x|=-x$ అయినప్పుడు $x<0$

$\therefore f$ ప్రదేశం $(0,\infty)$

v) $f\left(x\right)=\sqrt{\log_{10}\left(\frac{3-x}{x}\right)}\in R$

$\log_{10}\left(\frac{3-x}{x}\right)\geq 0 \quad \frac{3-x}{x}>0$

$\Rightarrow\frac{3-x}{x}\geq 10^{\circ}=1 \quad 3-x>0,\ x>0$

$\Rightarrow 3-x\geq x \qquad 0<x<3$

$\Rightarrow x\leq\frac{3}{2} \qquad 0<x<3$

$\Rightarrow x\in\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]\cap(0,3)=\left(0,\frac{3}{2}\right]$

$\therefore f=\left(0,\frac{3}{2}\right]$

2. i) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}$

సాధన:

$$f(x)=\sqrt{x^2-3x+2}\in R$$

$\Leftrightarrow x^2-3x+2\geq 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)\geq 0$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup[2,\infty]$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R-(1,2)$

www.sakshieducation.com

ii) $f(x)=\log(x^2-4x+3)$ www.sakshieducation.com

సాధన:

$f(x)=\log(x^2-4x+3)\in R$

$\Leftrightarrow x^2-4x+3>$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-3)>0$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,1)\cup(3,\infty)$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R-[1,3]$

iii) $f(x)=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{[x]+2}}$

సాధన:

$f(x)=\sqrt{\dfrac{4-x^2}{[x]+2}}\in R$

సందర్భం $(i) 4-x^2\geq 0$ మరియు $[0]+2>0$

(లేదా)

సందర్భం $(ii) 4-x^2\geq 0,[0]+2>0$

సందర్భం $(i) 4-x^2\geq 0,[0]+2>0$

$\Leftrightarrow (2-x)(2+2)\geq 0,[x]>-2$

$\Leftrightarrow x\in[-2,2],x\in[-1,\infty]$

$\Leftrightarrow x\in[-1,2] \qquad -(1)$

సందర్భం (ii)

$4-x^2\leq 0$ మరియు $[x]+2<0$

$\Leftrightarrow (2+x)(2-x)\leq 0,[x]<-2$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup[2,\infty],x\in(-\infty,-2)$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2) \qquad -(2)$

$(1),(2)$ ల నుండి

f ప్రదేశం $(-\infty,-2)\cup[-1,2]$

iv) $f(x)=\dfrac{1}{x+|x|}$

సాధన:

$f(x)=\dfrac{1}{x+|x|}\in R$

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

$\Leftrightarrow x+|x|\neq 0$

$\Leftrightarrow x\in(0,\infty)$

$\therefore |x|=x_1$ అయినప్పుడు $x\geq 0$

$|x|=-x$ అయినప్పుడు $x<0$

$\therefore f$ ప్రదేశం $(0,\infty)$

3. $i)\quad f(x)=\dfrac{1}{6x-x^2-5}$

సాధన:

$$f(x)=\frac{1}{6x-x^2-5}=\frac{1}{(x-1)(5-x)}\in R$$

$\Leftrightarrow (x-1)(5-x)\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq 1,5$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R=\{1,5\}$

$ii)\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)$

సాధన:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}(a>0)\in R$$

$\Leftrightarrow x^2-a^2>0$

$\Leftrightarrow (x+a)(x-a)>0$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-a)\cup(a,\infty)$

$\therefore f$ ప్రదేశం

$$(-\infty,-a)\cup(a,\infty)=R-[-a,a]$$

$iii)\quad f(x)=\sqrt{(x+2)(x-3)}$

సాధన:

$$f(x)=\sqrt{(x+2)(x-3)}\in R$$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-3)\geq 0$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-2)\cup[3,\infty]$

$\therefore f$ ప్రేదేశం.

$(-\infty,-2)\cup(3,\infty)=R-[-2,3]$

$iv)\quad f(x)=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$

సాధన: $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}\in R$

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

$\Leftrightarrow x^2-1\geq 0, x^2-3x+2>0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)\geq 0, (x-1)(x-2)>0$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(1.\infty),$

$x\in(-\infty,1)\cup(2,\infty)$

$\Leftrightarrow x\in(R-(-1,1))\cap(R-[1,2])$

$\Leftrightarrow x\in R-\{(-1,1)\cup[1,2]\}$

$\Leftrightarrow x\in R-(-1,2]$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup(2,\infty)$

$\therefore f$ ప్రదేశం.

$(-\infty,-1)\cup(2,\infty)=R-[-1,2]$

$v)\quad f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}$

సాధన: $(x)=\dfrac{1}{\sqrt{|x|-x}}\in R$

$\Leftrightarrow |x|-x>o$

$\Leftrightarrow |x|>x$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty,0)$

$\therefore f$ ప్రదేశం $(-\infty,0)$

b) కింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల ప్రదేశాలు, వ్యాప్తులు కనుక్కోండి.

క్రింది వాస్తవమూల్య ప్రమేయాల వ్యాప్తులు కనుక్కోండి.

i. $f(x)=\log|4-x^2|$

f ప్రదేశం $= R-\{-2,2\}$

$\therefore$ వ్యాప్తి = R

ii. $f(x)=\sqrt{[x]-x}$

f ప్రదేశం = Z ; f వ్యాప్తి $=\{0\}$

iii. $f(x)=\dfrac{\sin\pi[x]}{1+[x]^2}$

f ప్రదేశం = R, f వ్యాప్తి $=\{0\}$

$\because \sin n\pi=0,\ \forall\, n\in Z$

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

iv. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

f ప్రదేశం = $R-\{2\}$, f వ్యాప్తి $=R-\{4\}$

v. $f(x)=\sqrt{9+x^2}$

$9+x^2>0,\ \forall\, x\in R$

$\therefore f$ ప్రదేశం = R

f వ్యాప్తి = $[3,\infty)$

vi) $f(x)=\dfrac{x}{2-3x}$

సాధన:

$f(x)=\dfrac{x}{2-3x}\in R$

$\Leftrightarrow 2-3x\neq 0$

$\Leftrightarrow x\neq \dfrac{2}{3}$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R-\left\{\dfrac{2}{3}\right\}$ $y=f(x)=\dfrac{x}{2-3x}$ అనుకోండి.

$\Rightarrow y=\dfrac{x}{2-3x}$

$\Rightarrow 2y-3xy=x$

$\Rightarrow 2y=x(1+3y)$

$\therefore x=\dfrac{2y}{1+3y}$

$\therefore x\in R-\left[\dfrac{2}{3}\right], 1+3y\neq 0\Rightarrow y\neq -\dfrac{1}{3}$

$\therefore f$ వ్యాప్తి $R-\left\{-\dfrac{1}{3}\right\}$

vii) $f(x)=|x|+|1+x|$

సాధన:

$f(x)=|x|+|1+x|\in R$

$\Leftrightarrow x\in R$

$\therefore f$ ప్రదేశం R

www.sakshieducation.com

$\therefore |x| = x, x \geq 0$ అయినప్పుడు

$= -x, x < 0$ అయినప్పుడు

$|1+x| = 1+x, x \geq -1$అయినప్పుడు

$= -(1+x), x < -1$ అయినప్పుడు

$x = 0, f(0) = |0| + |1+0| = 1$

$x = 1, f(1) = |1| + |1+1| = 1+2 = 3$

$x = 2, f(2) = |2| + |1+2)| = 2+3 = 5$

$x = -2, f(-2) = |-2| + |1+(-2)| = 2+1 = 3$

$x = -1, f(-1) = |-1| + |1+(-1)| = 1+0 = 1$

$\therefore f$ వ్యాప్తి $[1, \infty]$

viii) $f(x) = \dfrac{\tan \pi [x]}{1 + sin\pi [x] + [x^2]}$

సాధన: $f(x) = \dfrac{\tan \pi [x]}{1 + sin\pi [x] + [x^2]} \in R$

$\Leftrightarrow x \in R, \therefore [x]$ పూర్ణాంకం కనుక $\tan \pi [x] \sin \pi [x]$ లు $\forall x \in R$కు సున్నాలు అవుతాయి.

$\therefore f$ ప్రదేశం R

వ్యాప్తి= $\{0\}$

ix) $f(x) = \dfrac{x}{2-3x}$

సాధన: $f(x) = \dfrac{x}{2-3x} \in R$

$\Leftrightarrow 2 - 3x \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq \dfrac{2}{3}$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R - \left\{\dfrac{2}{3}\right\} y = f(x) = \dfrac{x}{2-3x}$ అనుకోండి.

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow y = \frac{x}{2-3x}$

$\Rightarrow 2y - 3xy = x$

$\Rightarrow 2y = x(1+3y)$

$\therefore x = \frac{2y}{1+3y}$

$\therefore x \in R - \left[\frac{2}{3}\right], 1+3y \neq 0 \Rightarrow y \neq -\frac{1}{3}$

$\therefore f$ వ్యాప్తి $R - \left\{-\frac{1}{3}\right\}$

iii) $f(x) = |x| + |1+x|$

సాధన: $f(x) = |x| + |1+x| \in R$

$\Leftrightarrow x \in R$

$\therefore f$ ప్రదేశం R

$\therefore |x| = x, x \geq 0$ అయినప్పుడు

$= -x, x < 0$ అయినప్పుడు

$|1+x| = 1+x, x \geq -1$ అయినప్పుడు

$= -(1+x), x < -1$ అయినప్పుడు

$x = 0, f(0) = |0| + |1+0| = 1$

$x = 1, f(1) = |1| + |1+1| = 1+2 = 3$

$x = 2, f(2) = |2| + |1+2)| = 2+3 = 5$

$x = -2, f(-2) = |-2| + |1+(-2)| = 2+1 = 3$

$x = -1, f(-1) = |-1| + |1+(-1)| = 1+0 = 1$

$\therefore f$ వ్యాప్తి $[1, \infty]$

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. $g = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$**. ఇది** $A = \{1,2,3,4\}$ **నుంచి** $B = \{1,3,5,7\}$ **కు ప్రమేయం అవుతుందా?** $g(x) = ax + b$ **గా నిర్వచిస్తే** a, b **విలువలు కనుక్కోండి.**

సాధన:

$A = \{1,2,3,4\}; B = \{1,3,5,7\}$

$g = \{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7)\}$

కనుక $g(1) = 1, g(2) = 3, g(3) = 5, g(4) = 7$

www.sakshieducation.com

A లో ప్రతీ $a \in A$ కి అనురూపంగా $(a, b) \in g$ అయ్యేటట్లు B లో ఒకే ఒక్క b వ్యవస్థితం అవుతుంది. కనుక b ప్రమేయం అవుతుంది.

ఇప్పుడు $g(x) = ax + b$

$g(1) = a(1) + b = 1 \Rightarrow a + b = 1 \quad (1)$

$g(2) = a(2) + b = 3 \Rightarrow 2a + b = 3 \quad (2)$

$(1), (2)$ ను సాధించగా $a = 2, b = -1$.

2. $f(x) = e^x$ **మరియు** $g(x) = \log_e x$ **అయితే, .** $fog = gof$ **అని చూపండి.** f^{-1}**మరియు** g^{-1}**లు కనుక్కోండి.**

సాధన: (i) $fog(x) = f[g(x)]$ $\qquad gof(x) = g[f(x)]$

$= f(\log_e x) \qquad = g(e^x)$

$= e^{\log_e x} \qquad = e^{\log_e e^x}$

$= x \qquad = x$

$(\because a^{\log_a m} = m) \qquad (\because \log_e e = 1)$

$\therefore \boxed{fog = gof}$

(ii) $f(x) = e^x \qquad g(x) = \log_e x$

$y = f(x)$ అనుకొనుము $\qquad y = g(x)$ అనుకొనుము

$\Rightarrow f^{-1}(y) = x \qquad \Rightarrow y = \log_e x$

$\Rightarrow y = e^x \qquad \Rightarrow x = e^y$

$\Rightarrow \log_e y = x \qquad g(y) = e^y$

$\therefore f^{-1}(y) = \log_e y \qquad \therefore \boxed{g^{-1}(x) = e^x}$

$\boxed{f^{-1}(x) = \log_e y}$

3. $f : R \to R$ **ను** $f(x) = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$ **గా నిర్వచిస్తే,** $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$ **అని చూపండి.**

సాధన:

$f : R \to R, f(x) = \dfrac{3^x + 3^{-x}}{2}$

ఇప్పుడు $f(x+y) = \dfrac{3^{x+y} + 3^{-(x+y)}}{2}$

www.sakshieducation.com

$$= \frac{3^x.3^y + 3^{-x}.3^{-y}}{2} \quad -(1)$$

www.sakshieducation.com

$$f(x-y) = \frac{3^{x-y} + 3^{-(x-y)}}{2}$$

$$= \frac{3^x.3^{-y} + 3^{-x}.3^y}{2} \quad -(2)$$

$$LHS = f(x+1) + f(x-y)$$

$$= \frac{3^x.3^y + 3^{-x}.3^{-y} + 3^x.3^{-y} + 3^{-x}.3^y}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[3^x\left(3^y + 3^{-y}\right) + 3^{-x}\left(3^{-y} + 3^y\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(3^x + 3^{-x}\right)\left(3^y + 3^{-y}\right)$$

$$= 2\left[\left(\frac{3^x + 3^{-x}}{2}\right)\left(\frac{3^y + 3^{-y}}{2}\right)\right]$$

$$2f(x).f(y)$$

$$\therefore f(x+y) + f(x-y) = 2f(x).f(y).$$

4. $f(x) = e^x, g(x) = \log_e x$ **అయితే** $fog = gof$ **అని చూపండి.** f^{-1}, g^{-1} **లు కనుక్కోండి.**

సాధన: $f(x) = e^x, g(x) = \log_e x$

ఇప్పుడు

$$(fog)(x) = f(g(x))$$

$$= f(\log_e x), \therefore g(x) = \log_e{}^x$$

$$= e^{(\log_e x)} = x$$

$$\therefore (fog)(x) = x \quad -(1)$$

మరియు

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

$$= g(e^x) \quad \therefore f(x) = e^x$$

$$= \log_e(e^x) \therefore g(x) = \log_e x$$

$$= x\log_e(e) = x(1) = x$$

$$\therefore (gof)(x) = x \quad -(2)$$

$(1),(2)$ ల నుండి $fog = gof$

$f(x) = e^x$

$y = f(x) = e^x$ అనుకోండి.

www.sakshieducation.com
www.sakshieducation.com

$\Rightarrow x = f^{-1}(y), y = e^x \Rightarrow x = \log_e(y)$

$\therefore f^{-1}(y) = \log_e(y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_e(x)$

$y = g(x) = \log_e(x)$ అనుకోండి.

$\therefore y = g(x) \Rightarrow x = g^{-1}(y)$

$\therefore y = \log_e(x) \Rightarrow x = e^y$

$\therefore g^{-1}9(y) = e^y$

$\Rightarrow g^{-1}9(x) = e^x$

$\therefore f^{-1}(x), = \log_e(x), g^{-1}(x) = e^x$

5.. $f : R \to R, gLR \to R$ **లను** $f(x) = 2x^2 + 3, g(x) - 3x - 2$ **గా నిర్వచిస్తే**

$i)\ (fog)(x),\ ii)\ (gof)\ (x),\ iii)\ fof\ (o),$

$iv)\ go(fof)(3)$ **లు కనుక్కోండి.**

సాధన: $f : R \to R, g : R \to R$

$f(x) = 2x^2 + 3; g(x) = 3x - 2$

$i)\quad (fog)(x) = f(g(x))$

$= f(3x-2), \therefore g(x) = 3x - 2$

$= f(3x-2)^2 + 3, \therefore f(x) = 2x^2 + 3$

$= 2(9x^2 - 12x + 4) + 3$

$= 18x^2 - 24x + 8 + 3$

$= 18x^2 - 24x + 11$

$ii)\quad (gof)(x) = g(f(x))$

$= g(2x^2 + 3), \therefore f(x) = 2x^2 + 3$

$= 3(2x^2 + 3) - 2, \therefore g(x) = 3x - 2$

$= 6x^2 + 9 - 1$

$= 6x^2 + 7$

$iii)\quad (fof)(0) = f(f(0))$

$= f(2(0) + 3) \therefore f(x) = 2x^2 + 3$

$= f(3)$

$= 2(3)^2 + 3$

$= 18 + 3 = 21$

$iv)\quad go(fof)(3)$

www.sakshieducation.com

$= go(f(f(3)))$

$= go(f(2.3^2 + 3)), \therefore f(x) = 2x^2 + 3$

$= go(f(21))$

$= g(f(21))$

$= g(2x21^2 + 3)$

$= g(885)$

$= 3(885) - 2, \therefore g(x) = 3x - 2$

$= 2653$

6. $f : R \to R, g : R \to R$ **లను** $f(x) = 3x - 1, g(x) = x^2 + 1$ **లుగా నిర్వచిస్తే**

$i)\ (fof)(x^2 + 1),\ ii)\ fog(2),\ iii)\ gof(2a - 3)$ **లు కనుక్కోండి.**

సాధన:

$f : R \to R, g : R \to R$

$f(x) = 3x - 1,\ g(x) = x^2 + 1$

$i)\quad (fof)(x^2 + 1)$

$= f(f(x^2 + 1))$

$= f[3(x^2 + 1) - 1] \therefore f(x) = 3x - 1,$

$= f(3x^2 + 2)$

$= 3(3x^2 + 2) - 1$

$= 9x^2 + 5$

$ii)\quad (fog)(2)$

$= f(g(2))$

$= f(2^2 + 1), \therefore g(x) = x^2 + 1$

$= f(5)$

$= 3(5) - 1 = 14 \therefore f(x) = 3x - 1$

$iii)\quad (gof)(2a - 3)$

$= g(f(2a - 3))$

$= g[3(2a - 3) - 1] \therefore f(x) = 3x - 1$

$= g(6a - 10)$

$= (6a - 10)^2 + 1 \therefore g(x) = x^2 + 1$

$= 36a^2 - 120a + 100 + 1$

$= 36a^2 - 120a + 101$

www.sakshieducation.com

7. కింది ప్రమేయాల విలోమాలు కనుక్కోండి.

$i) a, b \in R, f : R \to R$ ని $f(x) = ax + b$

$(a \neq 0)$ గా నిర్వచిస్తే.

సాధన:

$a, b \in R, f : R \to R$ మరియు

$f(x) = ax + b, a \neq 0$

$y = f(x) = ax + b$ అనుకోండి.

$\Rightarrow y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \qquad -(i)$

$y = ax + b$

$\Rightarrow x = \dfrac{y-b}{a} \qquad -(ii)$

$(i), (ii)$ ల నుండి

$f^{-1}(y) = \dfrac{y-b}{a} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-b}{a}$

$ii)$ $f : R \to (0, \infty)$ ని $f(x) - 5^x$ గా నిర్వచిస్తే

సాధన:

$f : R \to (0, \infty)$ $f(x) - 5^x$

$y = f(x) = 5^x$

$\therefore y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \qquad -(i)$

$y = 5^x$

$\Rightarrow \log_5(y) = x \qquad -(ii)$

$(i), (ii)$ ల నుండి

$f^{-1} = \log_5(y) \Rightarrow f^{-1}(x) = \log_5$

$iii)$ $f : (0, \infty) \to R$ ని $f(x) = \log_2 x$ గా నిర్వచిస్తే,

సాధన:

$f : (0, \infty) \to R$ $f(x) = \log_2 x$

$y = f(x) = \log_2(x)$ అనుకోండి.

$\therefore y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \qquad -(i)$

$y = \log_2(x)$

$\Rightarrow x - 2^y \qquad -(ii)$

$(i), (ii)$ ల నుండి

$f^{-1}(y) = 2^y \Rightarrow f^{-1}(x) = 2^x$

www.sakshieducation.com

7. $f(x)=1+x+x^2+.........(x)<1$ **అయితే** $f^{-1}(x)=\frac{x-1}{x}$ **అని చూపండి.**

సాధన.

$$f(x)=1+x+x^2+.........$$

$$a=1, r=x \qquad 5_{\infty}=\frac{a}{1-r}$$

$$f(x)=\frac{1}{1-x}$$

$$f(x)=y \Rightarrow x=f^{-1}(y)$$

$$\frac{1}{1-x}=y$$

$$\frac{1}{y}=1-x \Rightarrow x=1-\frac{1}{y}$$

$$x=\frac{y-1}{y}$$

$$f^{-1}(y)=\frac{y-1}{y}$$

$$f^{-1}(y)=\frac{x-1}{x}$$

8. $:[1,\infty)\to[1,\infty), f(x)=2^{x(x-1)}$ **గా నిర్వచిస్తే** $f^{-1}(x)$ **కనుక్కోండి.**

సాధన:

$$f(x)=2^{x(x-1)}$$

$$f(x)=y \Rightarrow x=f^{-1}(g)$$

$$2^{x(x-1)}=y \quad \begin{pmatrix} \therefore a^2=N \\ \log_a^N=x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \log_2^y=x(x-1)$$

$$x^2-x-\log_2^y=0$$

www.sakshieducation.com

$a=1, b=-1, c=-\log_2^y$

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{+1\pm\sqrt{1+4\log_2^y}}{2}$$

$$f^{-1}(y)=\frac{1\pm\sqrt{1+4\log_2^y}}{2}$$

$$f^{-1}(x)=\frac{1\pm\sqrt{1+4\log_2^x}}{2}$$

$\therefore :[1,\infty)\to[1,\infty)$

ఇప్పుడు $f^{-1}(x)=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4\log_2^x}}{2}$

9. $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}, x\neq\pm1$ **అయితే** $(fof^{-1})(x)=x$ **అని చూపండి.**

సాధన:

$$f(x)=\frac{x-1}{x+1}, x\neq\pm1$$

$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ అనుకోండి.

$f=f(x)\Rightarrow x=f^{-1}(y) \qquad -(i)$

$$y=\frac{x-1}{x+2}$$

$$\Rightarrow\frac{y+1}{y-1}=\frac{(x-1)+(x+1)}{(x-1)-(x+1)}$$

$$\Rightarrow\frac{y+1}{y-1}=\frac{2x}{-2}\Rightarrow x=\frac{y+1}{1-y}$$

$(i),(ii)$ ల నుండి

$$f^{-1}(f)=\frac{y+1}{1-y}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(f)=\frac{1+x}{1-x} \qquad -(iii)$$

ఇప్పుడు $(fof^{-1})(x)$

$=f(f^{-1}9x))$

$=f\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\therefore f^{-1}(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$

www.sakshieducation.com

$$= \frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)-1}{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)+1} \therefore f(x) = \frac{x-1}{x+1}$$

$$= \frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)-(1-x)} = \frac{2x}{x} = x$$

$\therefore fof^{-1}(x) = x$

10. $A = \{1,2,3\}, B = \{\alpha,\beta,\gamma\}, C = \{p,q,r\}$ **అయితే** $f: A \to B, g: B \to C$ **లను**

$f = \{(1,\alpha),(2,\beta),(3,\gamma)\}$,

$g = \{(\alpha,q),(\beta,r),\ (,p)\}$ **లుగా నిర్వచిస్తే,**

f, g **లు ద్విగుణ ప్రమేయాలు అని,** $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$ **అని చూపండి.**

సాధన:

$A = \{1,2,3\}, B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$,

$f: A \to B, f = \{(1,\alpha),(2,\beta),(3,\gamma)\}$

$\Rightarrow f(1) = \alpha, f(2) = \gamma, f(3) = \beta$

$\therefore A$ లో ఉన్న విభిన్న మూలకాలకు B లో విభిన్న $f-$ ప్రతిబింబాలున్నవి. కనుక $f: A \to B$ అన్వేక ప్రమేయం f వ్యాప్తి $= \{\alpha,\gamma,\beta\} = B$ (సహప్రదేశం)

కనుక $f: A \to B$ సంగ్రస్తం

$\therefore f: A \to B$ ద్విగుణ ప్రమేయం

$B = \{\alpha,\gamma,\beta\}, C = \{p,q,r\}, g: B \to C$

$g - \{(\alpha,q),(\beta,r),(\gamma,p)\}$

$\Rightarrow g(\alpha) = q, g(\beta) = r, g(\gamma) = p$

$\therefore B$ లో ఉన్న విభిన్న మూలకాలకు C లో విభిన్న మూలకాలు $g-$ ప్రతిబింబంగా ఉన్నది.

కనుక $g: B \to C$ అన్వేక ప్రమేయం.

g వ్యాప్తి $g = g(b) = \{p,q,r\} = c$

కనుక $g: B \to C$ సంగ్రస్తం

$\therefore g: B \to C$ ద్విగుణ ప్రమేయం

$f = \{(1,\alpha),(2,\gamma),(3,\beta)\}$

$g = \{(\alpha,q),(\beta,r),(\gamma,p)\}$

ఇప్పుడు $\therefore\ gof = \{(1,q),(2,p),(3,r)\}$

$\therefore\ (gof)^{-1} = \{(p,1),(p,2),(r,3)\} \qquad -(i)$

$g^{-1} = \{(q,\alpha),(r,\beta),(p,\gamma)\}$

www.sakshieducation.com

$f^{-1} = \{(\alpha,1),(\gamma,2),(\beta,3)\}$ www.sakshieducation.com

$f^{-1}og^{-1} = \{(q,1),(r,3),(p,2)\}$ $\qquad -(ii)$

$(i),(ii)$ ల నుండి

$(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$

11. $f: R \to R, g: R \to R, f(x) = 3x-2,$

$g(x) = x^2+1$ **గా నిర్వచిస్తే**

$i)(gof^{-1})(2),\ ii)\ (gof)(x-1)$ **లను కనుక్కోండి.**

సాధన:

$f: R \to R, g: R \to R, f(x) = 3x-2$

f ద్విగుణ ప్రమేయం $\Rightarrow$ విలోమం వ్యవస్థితం

$y = f(x) = 3x-2$

$\therefore y = f(x) \Rightarrow x = f^{-1}(y) \qquad -(i)$

$y = 3x-2 \Rightarrow x = \dfrac{x+2}{3} \qquad -(ii)$

$(i),(ii)$ ల నుండి

$f^{-1}(y) = \dfrac{y+2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$

ఇప్పుడు $(gof^{-1})(2)$

$= g(f^{-1}(2))$

$= g\left(\dfrac{2=2}{3}\right), \therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x+2}{3}$

$= g\left(\dfrac{4}{3}\right), \therefore g(x) = x^2+1$

$= \left(\dfrac{4}{3}\right)2+1 = \dfrac{16}{9}+1 = \dfrac{25}{9}$

$\therefore (g\,o\,f^{-1})(2) = \dfrac{25}{9}$

$ii)\quad (gof)(x-1)$

$= g(f(x-1))$

$= g(3(x-1)-2) \therefore f(x) = 3x-2$

$= g(3x-5)$

$= (3x-5)^2+1, \therefore g(x) = x^2+1$

$= gx^2-30x+26$

$\therefore (gof)(x-1) = 9x^2-30x+26.$

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

12. f, g వాస్తవమూల్య ప్రమేయాలను $f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x^2$ గా నిర్వచిస్తే

(i) $(3f - 2g)(x)$ (ii) $(fg)(x)$

(iii) $\left(\frac{\sqrt{f}}{g}\right)(x)$ (iv) $(f + g + 2)(x)$ అను కనుక్కోండి.

సాధన:

$f(x) = 2x - 1,\ g(x) = x^2$

i. $3f = 3(2x-1)$ $2g = 2x^2$

$= 6x - 3$

$\therefore (3f - 2g)(x) = 3f(x) - 2g(x)$

$= 6x - 3 - 2x^2$

$= -2x^2 + 6x - 3$

$= -\left[2x^2 - 6x + 3\right]$

ii. $(fg)(x) = f(x)g(x) = (2x-1)x^2 = 2x^3 - x^2$

iii. $\left(\frac{\sqrt{f}}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{f(x)}}{g(x)} = \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2}$

iv. $(f + g + 2)x = f(x) + g(x) + 2$

$= 2x - 1 + x^2 + 2$

$= x^2 + 2x + 1$

$= x^2 + x + x - 1$

$= x(x+1) + 1(x+1)$

$= (x+1)(x+1) = (x+1)^2$

13. $f = \{(1,2),(2,-3),(3,-1)\}$ అయితే, ఈ క్రింది వాటిని కనుక్కోండి.

i) $2f$ ii) $2 + f$ iii) f^2 iv) $\sqrt{f}$

సాధన: $f = \{(1,2),(2,-3),(3,-1)\}$

www.sakshieducation.com

i. $2f=\{(1,2\times 2),(2,-3\times 2),(3,-1\times 2)\}$

www.sakshieducation.com

$=\{(1,4),(2,-6),(3,-2)\}$

ii. $2+f\{(1,2+2),(2,-3+2),(3,-1+2)\}$

$=\{(1,4),(2,-1),(3,1)\}$

iii. $f^2=\left\{\left(1,2^2\right),\left(2,(-3)^2\right),\left(3,(-1)^2\right)\right\}$

$\{(1,4),(2,9),(3,1)\}$

iv. $\sqrt{f}=\left\{\left(1,\sqrt{2}\right)\right\}$

14. $f(x)=x^2, g(x)=2^x$ **అయితే** $(fog)(x)=(gof)(x)$ **సమీకరణం సాధించండి.**

సాధన:

$f(x)=x^2, g(x)=2^2$

$(fog)(x)=f(g(x))$

$=f(2^x), \therefore g(x)=2^x$

$=(2^x)^2=2^{2x}, \therefore f(x)=x^2$

$\therefore \quad (fog)(x)=2^{2x} \qquad -(i)$

$(gof)(x)=g(f(x))$

$=g(x^2) \therefore f9x)=x^2$

$=(2)^{x^2} \therefore g(x)=2^x$

$\therefore \quad (gof)(x)=(2)^{x^2} \qquad -(ii)$

$\therefore \quad (fog)(x)=(gof)(x)$

$\Rightarrow 2^{2x}=(2)^{x^2}$

$\Rightarrow 2x=x^2 \Rightarrow x^2-2x=0$

$\Rightarrow (x-2)=0$

$\Rightarrow x=0, x=2$

$\therefore x=0,2$

15. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}(x\neq \pm 1)$ **అయితే** $(fofof)(x),(fofofof)(x)$ **కనుక్కోండి.**

సాధన: $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}(x\neq \pm 1)$

www.sakshieducation.com

i) $(fofof)(x) = (fof)[f(x)]$

$$= (fof)\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \therefore f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$= f\left[f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]$$

$$= f\left[\frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1}\right]$$

$$= f\left(\frac{x+1+x-1}{x+1-x+1}\right)$$

$$= f\left(\frac{2x}{2}\right) = f(x) \qquad (i)$$

ii) $(fofofof)(x) = f[(fofof)(x)]$

$= f[f(x)]$ (i) నుండి

$$= f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{x+1}{x-1}+1}{\frac{x+1}{x-1}-1} \therefore f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{x+1+x-1}{x+1-x+1} = \frac{2x}{2} = x$$

16. కింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల ప్రదేశాలు కనుక్కోండి.

i) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2-1)(x+3)}$

సాధన:

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-1)(x+3)} \in R$$

$\Leftrightarrow (x^2-1)(x+3) \neq 0$

$\Leftrightarrow (x+1)(x-1)(x+3) \neq 0$

$\Leftrightarrow x \neq -1, 1, -3$

$\therefore f$ ప్రదేశం $= R - \{-1, 1, -3\}$

www.sakshieducation.com

ii) $f(x)=\frac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ www.sakshieducation.com

సాధన:

$$f(x)=\frac{2x^2-5x+7}{(x-1)(x-2)(x-3)}\in R$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x-3)\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x\neq 1, x\neq 2, x\neq 3$$

$\therefore f$ ప్రదేశం $=R-\{1,2,3\}$

iii. $f(x)=\frac{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}}{x}$

$2+x\geq 0 \quad 2-x\geq 0, \quad x\neq 0$

$\Rightarrow x\geq -2 \quad \Rightarrow 2\geq x, \quad x\neq 0$

$\Rightarrow x\leq 2$

$\therefore f$ ప్రదేశం = $[-2,2]-\{0\}$

iv. $f(x)=\sqrt{\log_{0.3}\left(x-x^2\right)}$

$\log_{0.3}\left(x-x^2\right)\geq 0$

$\Rightarrow \left(x-x^2\right)\leq (0.3)^o$

$\Rightarrow x-x^2\leq 1$

$\Rightarrow 0\leq x^2-x+1$

$\Rightarrow x^2-x+1\geq 0$

$\Rightarrow x^2-x+1>0, \forall x\in R$ .... (1)

$x-x^2>0$

$\Rightarrow x-x^2<0$

$\Rightarrow x(x-1)<0$

$\Rightarrow 0<x<1$

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

x^2 గుణకం ధనాత్మకం www.sakshieducation.com

$\therefore\ x \in (0,1)$

(1) మరియు (2) ల నుండి

f = $R \cap (0,1) = (0,1)$

(లేక) f ప్రదేశం $= (0,1)$

17. $R-\{0\}$ పై వాస్తవ మూల్య ప్రమేయం $f(x)=\frac{x}{e^x-1}-\frac{x}{2}+1$ సరి ప్రమేయం అని చూపండి.

సాధన: $f(x)=\frac{x}{e^x-1}-\frac{x}{2}+1$ .... (1)

$x \in R-\{0\}$ అనుకొనుము

$f(x)=\frac{x}{e^x-1}+\frac{x}{2}+1$ గా తీసికొనిన

$f(x)=\frac{-x}{\frac{1}{e^x}-1}+\frac{x}{2}+1$

$=\frac{-xe^x}{1-e^x}+\frac{x}{2}+1$

$=\frac{-xe^x}{-(e^x-1)}+\frac{x}{2}+1$

$=\frac{xe^x}{e^x-1}+\frac{x}{2}+1$ .... (2)

$f(x)-f(-x)$ ను తీసికొనిన

$f(x)-f(-x)=\frac{x}{e^x-1}-\frac{x}{2}+1-\frac{x}{e^x-1}-\frac{x}{2}-1$

$=\frac{x-xe^x}{e^x-1}-\frac{2x}{2}$

$=\frac{x(e^x-1)}{(e^x-1)}-x$

$=x-x=0$

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

$f(x) - f(-x) = 0$

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow f(-x) = f(x)$

$\therefore$ f సరి ప్రమేయం

18. $A = \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\}$, $f : A \rightarrow B$ సంగ్రస్తం అయితే $f(x) = \cos x$ గా నిర్వచిస్తే B కనుక్కోండి.

సాధన: $f : A \rightarrow B$ సంగ్రస్తం

$f(x) = \cos x$ అయితే $B = f$ వ్యాప్తి $= f(A)$

$= \left\{f(0), f\left(\frac{\pi}{6}\right), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f\left(\frac{\pi}{3}\right), f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right\}$

$\therefore f(0) = \cos 0° = 1$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos 90° = 0$

$\therefore f(A) = \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 0\right\}$

$\therefore f$ వ్యాప్తి $= B = \left\{1, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}, 0\right\}$

19. $f : R \rightarrow R,\ g : R \rightarrow R$ లను $f(x) = 4x - 1,\ g(x) = x^2 + 2$ గా నిర్వచిస్తే

(i) $(gof)(x)$ (ii) $(gof)\left(\frac{a+1}{4}\right)$

(iii) $fof(x)$ (iv) $go(fof)$ కనుక్కోండి.

www.sakshieducation.com

సాధన:

i. $(gof)(x) = g(f(x))$

$= g(4x-1)$

$= (4x-1^2)+2$

$= 16x^2 + 1 - 8x + 2$

$= 16x^2 - 8x + 3$

ii. $(gof)\left(\frac{a+1}{4}\right) = g\left[f\left(\frac{a+1}{4}\right)\right]$

$= g\left[4\left(\frac{a+1}{4}\right)-1\right]$

$= g(a) = a^2 + 2$

iii. $fof(x) = f\{f(x)\}$

$= f(4x-1) = 4[4x-1]-1$

$= 16x - 4 - 1 = 16x - 5$

iv. $go(fof) = go(fof)$

$= g[1\times 0 - 5]$

$= g[-5]$

$= (-5)^2 + 2 = 25 + 2 = 27$

www.sakshieducation.com

19. $f : R-\{0\} \to R$ను $f(x) = x + \frac{1}{x}$గా నిర్వచిస్తే $(f(x))^2 = f(x^2) + f(1)$ అని చూపండి.

సాధన:

$f : R-\{0\} \to R,$

$f(x) = x + \frac{1}{x}$

ఇప్పుడు $f(x^2) + f(1) = (x^2 + \frac{1}{x^2}) + (1 + \frac{1}{1})$

$$= x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$$

$$= (x + \frac{1}{x})^2 = (f(x))^2$$

$$\therefore (f(x))^2 = f(x^2) + f(1)$$

20. $f : R \to R$ **ను** $f(x) = \frac{e^{|x|} - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ **గా నిర్వచిస్తే,** f **అన్వేకం, సంగ్రస్తం, ద్విగుణం అవుతాయేమో నిర్ణయించండి.**

సాధన: $f : R \to R$ ను

$f(x) = \frac{e^{|x|} - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ గా నిర్వచించారు

$$f(0) = \frac{e^0 - e^0}{e^0 + e^0} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

$$f(-1) = \frac{e^1 - e^1}{e^{-1} + e^1} = 0$$

$$\therefore f(0) = f(-1) = 0$$

$\Rightarrow$ కాబట్టి f అన్వేకం కాదు.

$y = f(x) = \frac{e^{|x|} - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ అనుకోండి

$y = 1$ కి $f(x) = 1$ అయ్యేటట్లు R లో x ఉండదు.

$\Rightarrow$ కాబట్టి f సంగ్రస్తం కాదు

ఒకవేళ $x \in R$ కు $f(x) = 1$ అయితే

$$\frac{e^{|x|} - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1$$

$\Rightarrow e^{|x|} - e^{-x} = e^x + e^{-x}$, కాబట్టి $x \neq 0$ స్పష్టం.

$x > 0$ అయితే

$e^x - e^{-x} = e^x + e^{-x} \Rightarrow -e^{-x} = e^{-x}$ అసాధ్యం

$x < 0$ అయితే

$e^x - e^{-x} = e^x + e^{-x}$

$\Rightarrow e^{-x} - e^x$ అసాధ్యం

21. $f : R \to R$ **ను** $f(x) = \begin{cases} x, & x > 2 \\ 5x, 2, & x \leq 2 \end{cases}$ **గా నిర్వచిస్తే,** f **అన్వేకం, సంగ్రస్తం, ద్విగుణం అవుతాయో పరిశీలించండి.**

సాధన:

$3 > 2$ కాబట్టి $f(3) = 3$

www.sakshieducation.com

$1 < 2$ కాబట్టి $f(1) = 5(1) - 2 = 3$

$\therefore 1, 3$ లకు ఒకే $f-$ప్రతిబింబం ఉంది. కాబట్టి

f అన్వేకం కాదు.

సహప్రదేశం R లోని y కి,

$y > 2$ లేదా $y \le 2$ కావాలి.

$y > 2$ అయితే $x = y \in R, f(x) = x = y$

$y \le 2$ అయితే $x = \dfrac{y+2}{5} \in R,$

$x = \dfrac{y+2}{5} < 1$

$\therefore f(x) = 5x - 2 = 5\left[\dfrac{y+2}{5}\right] - 2 = y$

$\therefore f$ సంగ్రస్తం

f అన్వేకం కాదు కాబట్టి f ద్విగుణ ప్రమేయం కాదు.

22. $2^x + 2^y = 2$ **సమీకరణం ద్వారా నిర్వచించబడ్డ ప్రమేయం** $y(x)$ **ప్రదేశం కనుక్కోండి.**

సాధన: $2^x + 2^y < 2 \ (\because 2^y > 0)$

$\Rightarrow \log_2 2^x < \log_2 2$

$\Rightarrow x < 1$

$\therefore$ ప్రదేశం $= (-\infty, 1)$.

23. $f: R \to R$ **ను** $f(x+y) = f(x) + f(y) \ \forall x, y \in R, f(1) = 7,$ **గా నిర్వచిస్తే** $\sum_{r=1}^{n} f(r)$ **కనుక్కోండి.**

సాధన: $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1).$

$f(3) = f(2+1) = f(2) + f(1) = 3f(1).$ ఇలాగే $f(r) = rf(1).$

$$\sum_{r=1}^{n} f(r) = f(1) + f(2) + \ldots\ldots + f(n)$$

$$= f(1) + 2f(1) + \ldots\ldots\ldots + nf(1)$$

$$= f(1)(1 + 2 + \ldots\ldots + n)$$

$$= \frac{7n(n+1)}{2}$$

www.sakshieducation.com

24. $f(x)=\dfrac{\cos^2 x+\sin^4 x}{\sin^2 x+\cos^4 x}\ \forall x\in R$ అయితే $f(2012)=1$ అని చూపండి.

సాధన: $f(x)=\dfrac{\cos^2 x+\sin^4 x}{\sin^2 x+\cos^4 x}$

$$=\frac{1-\sin^2 x+\sin^2 x}{1-\cos^2 x+\sin^4 x}$$

$$=\frac{1-\sin^2 x(1-\sin^2 x)}{1-\cos^2 x(1+\sin^4 x)}$$

$$=\frac{1-\sin^2 x-\cos^2 x}{1-\sin^2 x+\cos^2 x}$$

$$=1.$$

$\therefore f(2012)=1$

25. $f:[0,3]\to[0,3]$,

$f(x)=\begin{cases}1+x, 0\le x\le 2\\ 3-x, 2<x\le 3\end{cases}$ గా నిర్వచిస్తే

$f[0,3]\subseteq[0,3]$ అని చూపి fof కనుక్కోండి.

సాధన:

$0\le x\le 2\Rightarrow 1\le 1+x\le 3$ ____ (i)

$2<x\le 3\Rightarrow -3\le -x\le -2$

$\Rightarrow 3-3\le 3-x\le 3-2$

$\Rightarrow 0\le 3-x<1$ ____ (ii)

$(i)(ii)$ ల నుండి

$f[0,3]\subseteq[0,3]$

$o\le x\le 1,$ అయితే

$(fof)(x)=f(f(x))$

$f(1+x)=1+(1+x)=2+x$

$[\therefore 1\le 1+x\le 2]$

$1<x\le,$ అయితే

$(fof)(x)=f(f(x))$

$=f(1+x)$

$=3-(1+x)$

$=2-x,[\therefore 2<1+x\le 3]$

$2<x\le 3,$ అయితే

$(fof)(x)=f(f(x))$

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

$= f(3-x)$
$= 1+(3-x)$
$= 4-x, [\because 0 \le 3-x < 1]$

$$\therefore (fof)(x) = \begin{cases} 2+x, 0 \le x < 1 \\ 2-x, 1 < x \le 2 \\ 4-x, 2 < x \le 3 \end{cases}$$

26. $f, g : R \to R$ **ప్రమేయాలను** $f(x) = \begin{cases} 0, x \in Q \\ 1, x \notin Q \end{cases}$, $g(x) = \begin{cases} -1, x \in Q \\ 1, x \notin Q \end{cases}$ **అని నిర్వచిస్తే**

$(fog)(\pi) + (gof)(e)$.

సాధన:

$$(fog)(\pi) = f(g(\pi)) = f(0) = 0$$
$$(gof)(e) = g(f(e)) = g(1) = -1$$
$$\therefore (fog)(\pi) + (gof)(e) = -1$$

8. $f : Q \to Q, f(x) = 5x+4$ **గా ప్రతీ** $x \in Q$ **కు నిర్వచిస్తే,** f **ద్విగుణ ప్రమేయం అని చూపి** f^{-1} **కనుక్కోండి.**

సాధన: $x_1, x_2 \in Q$,

$f(x_1) = f(x_2)$
$\Rightarrow 5x_1 + 4 = 5x_2 + 4$
$\Rightarrow 5x_1 = 5x_2$
$\Rightarrow x_1 - x_2$

$\therefore f$ అన్వేకం

$y \in Q$ అయితే $= \dfrac{y-4}{5} \in Q$ వ్యవస్థితం

$$f(x) = f\left(\frac{y-4}{5}\right) = 5\left(\frac{y-4}{5}\right) + 4 = y$$

$\therefore f$ సంగ్రస్తం

కనుక ద్విగుణ ప్రమేయం

$\therefore f^{-1} : Q \to Q$ వ్యవస్థితం. కాని Q లో ప్రతీ x కు

$(fof^{-1})(x) = I(x)$

$\Rightarrow f(f^{-1}(x)) = x, \therefore f(x) = 5x+4$
$\Rightarrow 5f^{-1}(x) + 4 = x$
$\Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x-4}{5}, \forall x \in Q$

www.sakshieducation.com

27. $f=\{(4,5),(5,6),(6,-4)\}$ www.sakshieducation.com

$g=\{(4,-4),(6,5),(8,5)\}$ **అయితే**

$i)\ f+g \quad ii)\ f-g \quad iii) 2f+4g$

$iv)\ f+4 \quad v) fg \quad vi)\ \dfrac{f}{g}$

$vii) |f| \quad viii) \sqrt{f} \quad ix)\ f^2$

$x)\ f^3$ **లు కనుక్కోండి.**

సాధన:

$f=\{(4,5),(5,6),(6,-4)\}$

$g=\{(4,-4),(6,5),(8,5)\}$

f ప్రదేశం $=\{4,5,6\}=A$

g ప్రదేశం $=\{4,6,8\}=B$

$f\pm g$ ప్రదేశం $=A\cup B=\{4,6\}$

$i)\quad f+g=\{4,5+(-4),(6,-4+5)\}$

$=\{(4,1),(6,1)\}$

$ii)\quad f-g=\{(4,5-(-4)),(6,-4,-5)\}$

$=\{(4,9),(6,-9)\}$

$iii)\quad 2f$ ప్రదేశం $=A=\{4,5,6\}$

$4g$ ప్రదేశం $=B=\{4,6,8\}$

$2f+4f$ ప్రదేశం $A\cap B=\{4,6\}$

$\therefore 2f=\{(4,10),(5,12),(6,-8)\}$

$4g=\{(4,-16,(6,20),(8,20)\}$

$\therefore 2f+4g=\{(4,10+(-16),6,-8+20)\}$

$=\{(4,-6),(6,12)\}$

$iv)\quad f+4$ ప్రదేశం $=A=\{4,5,6\}$

$f+4=\{(4,5+4),(5,6+4),(6,-4+4)\}$

$=\{(4,9),(5,10),(6,0)\}$

$v)\quad fg$ ప్రదేశం $=A\cap B=\{4,6\}$

$fg=\{(4,(5)(-4),(6,(-4)(5))\}$

$\{(4,-20),(6,-20)\}$

www.sakshieducation.com

www.sakshieducation.com

vi) $\frac{f}{g}$ ప్రదేశం $=\{4,6\}$

$$\frac{f}{g}=\left\{\left(4,\frac{-5}{5}\right),\left(6,\frac{-4}{5}\right)\right\}$$

vii) $|f|$ ప్రదేశం $=\{4,5,6\}$

$$\therefore |f|=\{(4,|5|),(5,|6|),(6,|-4|)\}$$
$$=\{(4,5),(5,6),(6,4)\}$$

viii) $\sqrt{f}$ ప్రదేశం $=\{4,5\}$

$$\therefore \sqrt{f}=\{(4,\sqrt{5}),(5,\sqrt{6})\}$$

ix) f^2 ప్రదేశం $=\{4,5,6\}=A$

$$\therefore f^2=\{(4,(5)^2,(5,(6)^2,(6,(-4)^2)\}$$
$$=\{(4,25),(5,36),(6,16)\}$$

x) f^3 ప్రదేశం $=A=\{4,5,6\}$

$$\therefore f^3=\{(4,(5)^3,(5,(6)^3,(6,(-4)^3)\}$$
$$=\{(4,125),(5,216),(6,-64)\}$$

28. కింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల ప్రదేశాలు, వ్యాప్తులు కనుక్కోండి.

i) $f(x)=\frac{2+x}{2-x}$ ii) $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$

iii) $f(x)=\sqrt{9-x^2}$

సాధన:

i) $f(x)=\frac{2+x}{2-x}\in R$

$\Leftrightarrow 2-x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2 \Leftrightarrow x\in R=\{2\}$

$\therefore f$ ప్రదేశం $R-\{2\}$

$f(x)=\frac{y}{1}=\frac{2+x}{2-x}$ అనుకోండి.

www.sakshieducation.com

$$\Rightarrow \frac{y+1}{y-1} = \frac{(2+x)+(2-x)}{(2+x)-(2-x)}$$

$$\Rightarrow \frac{f+1}{y-1} = \frac{4}{2x}$$

$$\Rightarrow x = \frac{2(y-1)}{y+1}$$

$$y+1=0$$

$(i.e) u = -1$ కి x నిర్వచితం కాదు.

$\therefore f$ వ్యాప్తి $= R - \{-1\}$.

ii) $f(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$

సాధన:

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} \in R$$

$$\therefore \forall x \in R, x^2 + 1 \neq 0$$

f ప్రదేశం R

$f(x) = y = \dfrac{x}{1+x^2}$ అనుకుందాం.

$$\Rightarrow x^2 y - x + y = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{1-4y^2}}{y}$$, వాస్తవ సంఖ్య

$$\Leftrightarrow 1 - 4y^2 \geq 0, y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2y)(1+2y) \geq 0, y \neq 0$$

$$\Leftrightarrow y \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] - \{0\}$$

కాని $x = 0 \Rightarrow y = 0$

$\therefore f$ వ్యాప్తి $= \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$

iii) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

సాధన:

$$f(x) = \sqrt{9-x^2} \in R$$

www.sakshieducation.com

$\Leftrightarrow 9 - x^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (3 + x)(3 - x) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in [-3, 3]$

$\therefore f$ ప్రదేశం $[-3, 3]$

$f(x) = y = \sqrt{9 - x^2}$ అనుకుందాం.

$\Rightarrow x = \sqrt{9 - x^2} \in R$

$\Leftrightarrow 9 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (3 + y)(3 - y) \geq 0$

$\therefore -3 \leq y \leq 3$

కానీ $f(x)$ రుణేతర వాస్తవ సంఖ్యలు మాత్రమే తీసుకుందాం.

$\therefore f$ వ్యాప్తి $= [0, 3]$

12. $f(x) = x^2, g(x) = |x|$ **గా నిర్వచిస్తే, కింది ప్రమేయాలను కనుక్కోండి.**

$i)\ f+g,\ ii)\ f-g\ \ iii)\ fg\ \ iv)\ 2f\ \ v)\ f^2\ \ vi)\ f+3$

సాధన:

$f(x) = x^2$

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

f ప్రదేశం $= g$ ప్రదేశం $= R$

కాబట్టి (i) నుంచి (vi) వరకు ప్రమేయాల ప్రదేశం R

$i)\ \ (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$$= x^2 + |x| = \begin{cases} x^2 + x, x \geq 0 \\ x^2 - x, x < 0 \end{cases}$$

$ii)\ \ (f-g)(x) = f(x) - g(x)$

$$= x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 - x, x \geq 0 \\ x^2 - (-x), x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 - x, x \geq 0 \\ x^2 + x, x < 0 \end{cases}$$

$iii)\ \ (fg)(x) = f(x).g(x)$

$$= x^2 |x| = \begin{cases} x^3, x \geq 0 \\ -x^3, x < 0 \end{cases}$$

$iv)\ \ 2f(x) = 2f(x) = 2x^2$

$v)\ \ f^2(x) = (f(x))^2 = (x^2)^2 = x^4$

$vi)\ \ f+3(x) = f(x) + 3 = x^2 + 3$

www.sakshieducation.com

13. ఈ కింది ప్రమేయాలలో ఏవి సరి లేదా బేసి ప్రమేయాలో నిర్ధారించండి.

www.sakshieducation.com

$i)\ f(x) = a^x - a^{-x} + \sin x$

సాధన:

$$f(x) = a^x - a^{-x} + \sin x$$

$$\therefore\ f(-x) = a^{-x} - a^x + \sin(-x)$$

$$= a^{-x} - a^x - \sin x$$

$$= (a^x - a^{-x} + \sin x) = -f(x)$$

$\therefore\ f(x)$ బేసి ప్రమేయం.

$ii)\quad f(x) = x\left(\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$

సాధన:

$$f(x) = x\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$$

$$f(-x) = (-x)\left(\frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1}\right)$$

$$= -x\left(\frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1}\right)$$

$$= -x\left(\frac{1 - e^x}{1 + e^x}\right)$$

$$= x\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right) = f(x)$$

$\therefore\ f$ సరి ప్రమేయం.

$iii)\quad f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$

సాధన:

$$f(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$f(-x)=\log\left(-x+\sqrt{(-x^2)+1}\right)$$

$$=\log\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$=\log\left[\frac{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]$$

$$=\log\left[\frac{(x^2+1)-x^2}{x+\sqrt{x^2+1}}\right]$$

$$=\log\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)$$

$$=\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^{-1}$$

$$=-\log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$=-f(x)$$

$\therefore f$ బేసి ప్రమేయం.

14. కింది వాస్తవ మూల్య ప్రమేయాల ప్రదేశాలు కనుక్కోండి.

i) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{[x^2]-[x]-2}}$

సాధన:

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{[x^2]-[x]-2}}\in R$$

$$\Leftrightarrow [x]^2-[x]-2>0$$

$$\Leftrightarrow ([x]+1)([x]-2]>0$$

$$\Leftrightarrow [x]<-1,(or)[x]>2$$

$$[x]<-1\Rightarrow [x]=-2,-3,-4,........$$

$$\Rightarrow x<-1$$

$$[x]>2\Rightarrow [x]=23,4,5,..........\Rightarrow x\geq 3$$

$\therefore f$ ప్రదేశం $=(-\infty,-1)\infty\left[3,\infty\right]$

$=R-[-1,3)$

www.sakshieducation.com

$ii)\quad f(x)=\log(x-[x])$

సాధన:

$$f(x)=\log(x-[x])\in R$$

$$\Leftrightarrow x-[x]>0$$

$$\Leftrightarrow x>[x]$$

$\Leftrightarrow x$ పూర్ణ సంఖ్య కాదు.

$\therefore f$ ప్రదేశం $R-Z$

$iii)\quad f(x)=\dfrac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{x}$

సాధన:

$$f(x)=\frac{\sqrt{3+x}+\sqrt{3-x}}{x}\in R$$

$$\Leftrightarrow 3+x\geq 0, 3-x\geq 0, x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x\geq -3, x\leq 3, x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow -3\leq x\leq 3, x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x\in[-3,3], x\neq 0$$

$$\Leftrightarrow x\in[-3,3]-\{0\}$$

$\therefore f$ ప్రదేశం $[-3,3]-\{0\}$

www.sakshieducation.com

విస్తరణ కొలతలు

1. **కింది దత్తాంశానికి మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.**

   i) 38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44

   ii) 3, 6, 10, 4, 9, 10

Sol. i) దత్తాంశానికి అంకమధ్యమం $\bar{x} = \dfrac{38+70+48+40+42+55+63+46+54+44}{10}$

$$= \frac{500}{10} = 50$$

విచలనాల పరమమూల్యాలు $|x_i - \bar{x}|$ = 12, 20, 2, 10, 8, 5, 13, 4, 4, 6.

మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనం $= \dfrac{\sum_{i=1}^{10} |x_i - \bar{x}|}{10}$

$$= \frac{12+20+2+10+8+5+13+4+4+6}{10}$$

$$= \frac{84}{10} = 8.4$$

ii) దత్తాంశానికి అంకమధ్యమం $(\bar{x}) = \dfrac{\sum_{i=1}^{6} x_i}{n}$

$$\therefore \bar{x} = \frac{3+6+10+4+9+10}{6} = \frac{42}{6} = 7$$

విచలనాల పరమమూల్యాలు $|x_i - \bar{x}|$ = 4, 1, 3, 3, 2, 3

మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనం $= \dfrac{\sum_{i=1}^{6} |x_i - \bar{x}|}{6}$

$$= \frac{4+1+3+3+2+3}{6} = \frac{16}{6} = 2.6666 \simeq 2.67$$

2. **కింది దత్తాంశానికి మధ్యగతం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.**

   13, 17, 16, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17

   4, 6, 9, 3, 10, 13, 2

Sol. దత్త బిందువులను పరిమాణంపరంగా ఆరోహణ క్రమంలో వ్యక్తపరి స్తే 10, 11, 11, 12, 13, 13, 16, 16, 17, 17, 18

అప్పుడు ఈ 11 పరిశీలనల మధ్యగతం = 13

పరమమూల్య విలువలు $|x_i - M| = 3, 2, 2, 1, 0, 0, 3, 3, 4, 4, 5$

మధ్యగతం నుంచి మధ్యమ విచలనం $= \dfrac{\sum_{i=1}^{11} |x_i - M|}{n} = \dfrac{3+2+2+1+0+0+3+3+4+4+5}{11}$

www.sakshieducation.com

$$= \frac{27}{11} = 2.45$$

ii) దత్త బిందువులను పరిమాణం పరంగా ఆరోహణ క్రమంలో వ్యక్తపరిస్తే 2, 3, 4, 6, 9, 10, 13
అప్పుడు ఈ 7 పరిశీలనల మధ్యగతం = 6

పరమమూల్య విలువలు $|x_i - \bar{x}|$ = 4, 3, 2, 0, 3, 4, 7

మధ్యగతం నుంచి మధ్యమ విచలనం = $\dfrac{\sum_{i=1}^{7}|x_i - M|}{n} = \dfrac{4+3+2+0+3+4+7}{7} = \dfrac{23}{7} = 3.29$

3. **కింది విభాజనానికి మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి.**

i)

x_i	10	11	12	13
f_i	3	12	18	12

ii)

x_i	10	30	50	70	90
f_i	4	24	28	16	8

Sol. i)

x_i	f_i	$f_i x_i$	$\|x_i - \bar{x}\|$	$f_i \|x_i - \bar{x}\|$
10	3	30	1.87	5.61
11	12	132	0.87	10.44
12	18	216	0.13	2.24
13	12	156	1.13	13.56
	N = 45	$\Sigma f_i x_i$ = 534		$\Sigma f_i \|x_i - \bar{x}\|$ = 31.95

∴ అంక మధ్యమం $(\bar{x}) = \dfrac{\Sigma f_i x_i}{N} = \dfrac{534}{45} = 11.87$

∴ మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనం= $\dfrac{\sum_{i=1}^{4} f_i |x_i - \bar{x}|}{N} = \dfrac{31.95}{45} = 0.71.$

www.sakshieducation.com

ii)

x_i	f_i	$f_i\,x_i$	$\lvert x_i-\bar{x}\rvert$	$f_i\,\lvert x_i-\bar{x}\rvert$
10	4	40	40	160
30	24	720	20	480
50	28	1400	0	0
70	16	1120	20	320
90	8	720	40	320
	N = 80	$\Sigma f_i x_i = 4000$		$\Sigma f_i \lvert x_i-\bar{x}\rvert = 1280$

అంకమధ్యమం $(\bar{x}) = \frac{\Sigma f_i x_i}{N} = \frac{4000}{80} = 50$

$\therefore$ మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనం$= \frac{\sum_{i=1}^{5} f_i \lvert x_i-\bar{x}\rvert}{N} = \frac{1280}{80} = 16$.

4. **కింది పౌనఃపున్య విభాజనానికి మధ్యగతం నుంచి మధ్యమవిచలనాన్ని కనుక్కోండి.**

x_i	5	7	9	10	12	15
f_i	8	6	2	2	2	6

Sol.

x_i	f_i	సంచిత పౌనఃపున్యం CF)	$\lvert x_i-M\rvert$	$f_i\,\lvert x_i-M\rvert$
5	8	8	2	16
$7 \to M$	6	14 > N/2	0	0
9	2	16	2	4
10	2	18	3	6
12	2	20	5	10
15	6	26	8	48
	N = 26			$\Sigma f_i \lvert x_i-M\rvert = 84$

N = 26 మరియు $\frac{N}{2} = 13$

మధ్యగతం =7

మధ్యగతం నుంచి మధ్యమ విచలనం

$= \frac{\sum_{i=1}^{6} \lvert x_i-M\rvert}{n} = \frac{87}{26} = 3.23$.

www.sakshieducation.com

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. కింది అవిచ్ఛిన్న విభాజనాలకు మధ్యగతం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి

i)

సాధించిన మార్కులు	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60
బాలుర సంఖ్య	6	8	14	16	4	2

ii)

తరగతి అంతరం	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
పౌనః పున్యం	5	8	7	12	28	20	10	10

Sol. i)

తరగతి అంతరం	పౌనః పున్యం f_i	సంచిత పౌనఃపున్యం C.F.	మధ్య బిందువు x_i	$\|x_i - M\|$	$f_i\|x_i - M\|$
0-10	6	6	5	20.86	137.16
10-20	8	14	15	12.86	102.88
20-30	14	28	25	2.86	40.04
30-40	16	44	35	7.14	114.24
40-50	4	48	45	17.14	68.56
50-60	2	50	55	27.14	54.28
	N = 50				517.16

Hence L = 20, $\frac{N}{2} = 25$, $f_1 = 14$, f = 14, h = 10

మధ్యగతం $(M) = L + \left[\frac{\left(\frac{N}{2} - f_i\right)}{f}\right] h = 20 + \frac{25-14}{14} \times 10 = 20 + \frac{110}{14} = 20 + 7.86 = 27.86$

∴ మధ్యగతం నుంచి మధ్యమ విచలనం

$$= \frac{\sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - M|}{N} = \frac{517.16}{50} = 10.34.$$

www.sakshieducation.com

ii)

తరగతి అంతరం	పౌనః పున్యం f_i	సంచిత పౌనఃపున్యం C.F.	మధ్య బిందువు x_i	$\lvert x_i - M\rvert$	$f_i \lvert x_i - M\rvert$
0-10	5	5	5	41.43	207.15
10-20	8	13	15	31.43	251.44
20-30	7	20	25	21.43	150.01
30-40	12	32	35	11.43	137.16
40-50	28	60	45	1.43	40.04
50-60	20	80	55	8.57	171.40
60-70	10	90	65	18.57	185.70
70-80	10	100	75	28.57	285.70
	N=100				1428.6

$N = 100,\ \frac{N}{2} = 50,\ L = 40,\ f_1 = 32,\ f = 28,\ h = 10$

మధ్యగతం $(M) = L + \left[\frac{\left(\frac{N}{2} - f_i\right)}{f}\right]h = 40 + \frac{50-32}{28} \times 10 = 40 + \frac{180}{28} = 40 + 6.43 = 46.43$

∴ మధ్యగతం నుంచి మధ్యమ విచలనం

$$= \frac{\sum_{i=1}^{8} f_i \lvert x_i - M \rvert}{N} = \frac{1428.6}{100} = 14.29.$$

2. కింది అవిచ్ఛిన్న విభాజనానికి మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోండి..

ఎత్తు (in cms)	95-105	105-115	115-125	125-135	135-145	145-155
బాలుర సంఖ్య	9	13	26	30	12	10

Sol.

ఎత్తు (C.I)	బాలుర సంఖ్య (f_i)	Mid point x_i	$d_i = \frac{x_i - A}{h}$	$f_i d_i$	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert$	$f_i \lvert x_i - \bar{x}\rvert$
95-105	9	100	–3	–27	25.3	227.7
105-115	13	110	–2	–26	15.3	198.9
115-125	26	120	–1	–26	5.3	137.8
125-135	30	130 → (A)	0	0	4.7	141.0
135-145	12	140	1	12	14.7	176.4
145-155	10	150	2	20	24.7	247.0
	N=100			$\Sigma f_i d_i = -47$		1128.8

www.sakshieducation.com

అంక మధ్యమం $(\overline{x}) = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{N} \cdot h = 130 + \left(\frac{-47}{100}\right) \cdot 10 = 130 - 4.7 = 125.3$

$\therefore$ మధ్యమం నుంచి మధ్యమం విచలనం$= \frac{\sum_{i=1}^{6} f_i |x_i - \overline{x}|}{N} = \frac{1128.8}{100} = 11.29$.

3. **కింద ఇచ్చిన విచ్ఛిన్న దత్తాంశానికి విస్తృతిని కనుక్కోండి**

i) 6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12

ii) 350, 361, 370, 373, 376, 379, 38, 387, 394, 395

Sol. i) అంక మధ్యమం $\overline{x} = \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} = \frac{72}{8} = 9$

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
6	–3	9
7	–2	4
10	1	1
12	3	9
13	4	16
4	–5	25
8	–1	1
12	3	9
		$\Sigma |x_i - \overline{x}|^2 = 74$

విస్తృతి $(\sigma^2) = \frac{\sum_{i=1}^{8} (x_i - \overline{x})^2}{n} = \frac{74}{8} = 9.25$.

www.sakshieducation.com

ii) 350, 361, 370, 373, 376, 379, 38, 387, 394, 395

x_i	$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$
350	–27	729
361	–16	256
370	–7	49
373	–4	16
376	–1	1
379	2	4
385	8	64
387	10	100
394	17	289
395	18	324
		1832

అంకమధ్యమం $(\overline{x}) = \dfrac{350+361+370+373+376+379+385+387+394+395}{10} = \dfrac{3770}{10} = 377$

విస్తృతి $(\sigma^2) = \dfrac{\sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2}{n} = \dfrac{1832}{10} = 183.2.$

www.sakshieducation.com

4. కింది పౌనఃపున్య విభాజనానికి విస్తృతి, విచలనాలను కనుక్కోండి

x_i	6	10	14	18	24	28	30
f_i	2	4	7	12	8	4	3

Sol.

x_i	f_i	$f_i x_i$	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$f_i (x_i - \overline{x})^2$
6	2	12	–13	169	338
10	4	40	–9	81	324
14	7	98	–5	25	175
18	12	216	–1	1	12
24	8	192	5	25	200
28	4	112	9	81	324
30	3	90	11	121	363
	N=40	760			1736

అంకమధ్యమం

$$(\bar{x}) = \frac{760}{40} = 19$$

విస్తృతి

$$(\sigma^2) = \frac{\Sigma f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{1736}{40} = 43.4$$

ప్రామాణిక విచలనం. $(\sigma) = \sqrt{43.4} = 6.59$.

5. **సోపాన విచలన పద్ధతిని ఉపయోగించి, కింది దత్తాంశానికి మధ్యమం నుంచి మధ్యమ విచలనాన్ని కనుక్కోం డి**

Marks	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
No.of students	6	5	8	15	7	6	3

Sol.

Class interval	Mid point x_i	f_i	$d_i=(x_i-35)/10$	$f_i d_i$	$\|x_i\text{-median}\|$	$f_i \|x_i\text{-median}\|$
0-10	5	6	–3	–18	28.4	170.4
10-20	15	5	–2	–10	18.4	92
20-30	25	8	–1	–8	8.4	67.2
30-40	35	15	0	0	1.6	24
40-50	45	7	1	7	11.6	81.2
50-60	55	6	2	12	21.6	129.6
60-70	65	3	3	9	31.6	94.8
		N=50		$\Sigma f_i d_i = -8$		659.2

ఇక్కడ , మధ్యమం N = 5, $\text{Mean}(\bar{x}) = A + \frac{h(\Sigma f_i d_i)}{N}$

$$= 35 + \frac{10(-8)}{50} = 33.4 \text{ marks}$$

మధ్యమం నుంచి మధ్యమం విచలనం= $\frac{1}{N}\Sigma f_i \,|\, x_i - \bar{x}_i \,| = \frac{1}{50}(659.2) = 13.18$ (nearly)

www.sakshieducation.com

దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

1. **542 సభ్యుల వయస్సు విభాజనం తెలిపే కింది పట్టికలోని దత్తాంశానికి సోపాన విచలన పద్ధతినుపయోగించి మధ్యమాన్ని, విస్తృతిని కనుక్కోండి.**

వయస్సు సం.లలో	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
సభ్యుల సంఖ్య	3	61	132	153	140	51	2

Sol.

వయస్సు సం.ల ల C.I.	మధ్య బిందువు (x_i)	(f_i)	$d_i = \frac{x_i - A}{C}$ A = 55, C = 10	$f_i d_i$	d_i^2	$f_i d_i^2$
20-30	25	3	–3	–9	9	27
30-40	35	61	–2	–122	4	244
40-50	45	132	–1	–132	1	132
50-60	55→A	153	0	0	0	0
60-70	65	140	1	140	1	140
70-80	75	51	2	102	4	204
80-90	85	2	3	6	9	18
	N=542			–15	28	765

అంకమధ్యమం

$$(\bar{x}) = A + \frac{\Sigma f_i d_i}{N} \times C = 55 + \frac{-15}{542} \times 10 = 55 - 0.277 = 54.723$$

విస్తృతి $= \frac{\Sigma f_i d_i^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f_i d_i}{N}\right)^2 = \frac{765}{542} - \left(\frac{-15}{542}\right)^2 = \frac{765}{542} - \frac{225}{(542)^2}$

$$= \frac{542 \times 765 - 225}{(542)^2} = \frac{414630 - 225}{293764} = \frac{414405}{293764} = 1.4106$$

$$V(\mu) = V\left(\frac{X - A}{C}\right) = \left(\frac{1}{C}\right)^2 \cdot V(X) \qquad \left[\because V(ax+n) = a^2 \cdot V(x)\right]$$

$$V(X) = C^2 \cdot V(\mu) = 100 \times 1.4106 = 141.06.$$

2. **రెండు విభాజనాల విచలనాంకాలు 60, 70 వాటి ప్రామాణిక విచలనాలు వరసగా 21, 16 వాటి అంకమధ్యమాలను కనుక్కోండి**

Sol. Coefficient of variation (C.V) = $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

i) $60 = \frac{21}{\bar{x}} \times 100 \Rightarrow \bar{x} = 35$

ii) $70 = \frac{16}{\bar{y}} \times 100 \Rightarrow \bar{y} = 22.85$

www.sakshieducation.com

3.10 రోజులపాటు జరిగిన వర్తకంలో కింద ఇచ్చిన వాటాల (షేరుల) ధరల నుంచి, ఏ షేరు (వాటా) ఎక్కువ నిలకడ కలిగినదో కనుక్కోండి.

X	35	54	52	53	56	58	52	50	51	49
Y	108	107	105	105	106	107	104	103	104	101

Sol.

X	Y	X_i^2	Y_i^2
–15	8	225	64
4	7	16	49
2	5	4	25
3	5	9	25
6	6	36	36
8	7	64	49
2	4	4	16
0	3	0	9
1	4	1	16
–1	1	1	1
$\Sigma X_i = 10$	$\Sigma Y_i = 50$	$\Sigma X_i^2 = 360$	$\Sigma Y_i^2 = 290$

$$V(X) = \frac{\Sigma X_i^2}{n} - (\bar{X})^2 = \frac{360}{10} - \left(\frac{10}{10}\right)^2 = 36 - 1 = 35$$

$$V(Y) = \frac{\Sigma Y_i^2}{n} - (\bar{Y})^2 = \frac{290}{10} - \left(\frac{50}{10}\right)^2 = 29 - 25 = 4$$

Y is stable.

4.

5 పరిశీలన మధ్యమం 4.4, వాటి విస్తృతి 8.24. వాటిలో మూడు పరిశీలనలు 1, 2, 6 అయితే, మిగిలిన రెండు పరిశీలనలను కనుక్కోండి

Sol.

x_i	x_i^2
1	1
2	4
6	36
x	x^2
y	y^2

www.sakshieducation.com

ప్రామాణిక విచలనము $S.D. = \sqrt{\frac{\Sigma m^2}{n} - (\bar{x})^2}$

అంకమధ్యమం

$\bar{x} = 4.4$

$\Rightarrow 4.4 = \frac{1+2+6+x+y}{5}$

$\Rightarrow 9+x+y = 22$

$\Rightarrow x+y = 13 \quad ...(1)$

$S.D.^2 = \frac{1+4+3+x^2+y^2}{5} - (4.4)^2 = \frac{41+x^2+y^2}{5} - 19.36$

$S.D.^2 =$ = విస్తృతి = $\frac{41+x^2+y^2}{5} - 19.36$

$8.24 + 19.36 = \frac{41+x^2+y^2}{5}$

$41 + x^2 + y^2 = 5 \times 27.6$

$x^2 + y^2 = 138 - 41$

$x^2 + y^2 = 97 \quad ...(2)$

From (1) , (2)

$x^2 + (13 - x)^2 = 97$

$x^2 + 169 + x^2 - 26x = 97$

$2x^2 - 26x + 72 = 0$

$x^2 - 13x + 36 = 0$

$x - 9x - 4x + 36 = 0$

$x(x-9) - 4(x-9) = 0$

$(x-9)(x-4) = 0$

$x = 4, 9$

Put x = 4 in (1)

$y = 13 - 4 = 9$

Put x = 9 in (1)

$y = 13 - 9 = 4$

$\therefore$ If x = 4, then y = 9.

If x = 9 then y = 4.

www.sakshieducation.com

5.

9 అంశాలు కలిగిన ఒక సమితి యొక్క అంకమధ్యమం, ప్రామాణిక విచలనాలు వరసగా 43, 5. ఈ సమితికి 63 విలువ గల ఒక అంశం చేర్చితే, ఇచ్చిన 10 అంశాల సమితికి కొత్త మధ్యమం, ప్రామాణిక విచలనాన్ని కనుక్కోండి.

Sol. $\bar{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{9} x_i}{n}$

$43 = \dfrac{\sum_{i=1}^{9} x_i}{9}$

$\sum_{i=1}^{9} x_i = 43 \times 9 = 387$

కొత్త అంకమధ్యమం$= \dfrac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{n} = \dfrac{\sum_{i=1}^{9} x_i + x_{10}}{10} = \dfrac{387+63}{10} = 45$

$S.D^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{9} {x_i}^2}{9} - (\bar{x})^2 \Rightarrow 5^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{9} {x_i}^2}{9} - (43)^2$

$\dfrac{\sum_{i=1}^{9} {x_i}^2}{9} = 25 + 1849 \Rightarrow \dfrac{\sum_{i=1}^{9} {x_i}^2}{9} = 1874$

$\sum_{i=1}^{9} {x_i}^2 = 1874 \times 9 = 16866$

$\sum_{i=1}^{10} {x_i}^2 = \sum_{i=1}^{9} {x_i}^2 + x_{10}^2 = 16866 + 3969 = 20835$

New S.D. కొత్త ప్రామాణిక విచలనం $= \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{10} {x_i}^2}{10} - (\bar{x})^2} = \sqrt{\dfrac{20835}{10} - (45)^2}$

$= \sqrt{2083.5 - 2025} = \sqrt{58.5} = 7.6485$.

www.sakshieducation.com

6.

ఈ కింది పట్టిక, ఒక కర్మాగారంలో పనివాళ్ళ రోజువారీ జీతాలను తెలుపుతుంది. ఈ పనివాళ్ళ జీతాల ప్రమాణిక విచలనాన్ని, విచలనాంకంను గణనం చేయండి.

రోజువారీ జీతాలు (రూ॥)	125-175	175-225	225-275	275-325	325-375	375-425	425-475	475-525	525-575
పనివారి సంఖ్య	2	22	19	14	3	4	6	1	1

Sol.

తరగతి అంతరాల మధ్య బిందువులు సంఖ్యాపరంగా పెద్దవి కనుక ఈ సమస్యను మనం సోపాన విచలన పద్ధతి ఉపయోగించి సాధన చేద్దాం

$h = 50.\quad a = 300$ అనుకోండి అప్పుడు $y_i = \dfrac{x_i - 300}{50}$

తరగతి అంతరం మధ్య బిందువు x_i	పౌనః పున్యం f_i	y_i	$f_i y_i$	$f_i y_i^2$
150	2	–3	–6	18
200	22	–2	–44	88
250	19	–1	–19	19
300	14	0	0	0
350	3	1	3	3
400	4	2	8	16
450	6	3	18	54
500	1	4	4	16
550	1	5	5	25
	N = 72		$\Sigma f_i y_i = -31$	$\Sigma f_i y_i^2 = 239$

అంక మధ్యమం $\bar{x} = A + \left(\dfrac{\Sigma f_i y_i}{M}\right) \times h = 300 + \left(\dfrac{-31}{72}\right) 50 = 300 - \dfrac{1550}{72} = 278.47$

విస్తృతి $(\sigma_x^2) = \dfrac{h^2}{N^2}\left[N\Sigma f_i y_i^2 - (\Sigma f_i y_i)^2\right]$

$= \dfrac{2500}{72 \times 72}[72(239) - (31 \times 31)]$

$\sigma_x = \sqrt{2500\left(\dfrac{239}{72} - \dfrac{961}{72 \times 72}\right)} = 88.52$

విచలనాంకం$= \dfrac{88.52}{278.47} \times 100 = 31.79$.

7.

ఒకే రకం పరిశ్రమకు చెందిన రెండు సంస్థలు లలోని పనివారికి ఇచ్చిన జీతాలను విశ్లేషణ చేసినప్పుడు ఈ కింది పట్టికలో ని వివరాలు తెలిశాయి

	Firm A	Firm B
పని వారి సంఖ్య	500	600
రోజువారి సగటు జీతం	186	175
జీతాల విభాజనానికి విస్తృతి	81	100

(i) A లేదా B లో ఏ సంస్థ, ఆ పరిశ్రమలోని జీతాలలో ఎక్కువ విచలనాన్ని కలిగి ఉంది?

(ii) ఏ సంస్థ ఎక్కువ జీతం బిల్లును కలిగి ఉంది?

జ: సంస్థ A లోని జీతాల విభాజనం విస్తృతి 81 కనుక $\sigma_1^2 = 81 \Rightarrow \sigma_1 = 9.$

సంస్థ B లోని జీతాల విభాజనం విస్తృతి 100 కనుక $\sigma_2^2 = 100 \Rightarrow \sigma_2 = 10.$

సంస్థ A లోని జీతాల విభాజనపు విచలనాంకం $\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1} \times 100 = \frac{9}{186} \times 100 = 4.84$

సంస్థ B జీతాల విభాజనాంకం $\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2} \times 100 = \frac{10}{175} \times 100 = 5.71$

సంస్థ విచలనాంకం, సంస్థ విచలనాంకం కంటే పెద్దది కనుక వ్యక్తిగత జీతాలకి సంబంధించి, సంస్థ ఎక్కువ విచలనాన్ని క లిగినదని చెప్పగలం

(ii) సంస్థ A లోని పనివారి సంఖ్య$(n_1) = 500$

ఆ సంస్థ రోజువారీ సగటు జీతం $\bar{x}_1$ = Rs.186

రోజువారీ సగటు జీతం = చెల్లించిన మొత్తం జీతాలు/పనివారి సంఖ్య

కాబట్టి పనివారికి చెల్లించిన మొత్తం జీతాలు $= n_1\bar{x}_1 = 500 \times 186 = \text{Rs.}93,000$

సంస్థ B లోని పనివారి సంఖ్య $(n_2) = 600$

రోజువారీ సగటు జీతం $\bar{x}_2 = \text{Rs.}175$

పనివారికి చెల్లించిన మొత్తం జీతాలు= $n_2\bar{x}_2 = 600 \times 175 = \text{Rs.}1,05,000$

కాబట్టి సంస్థ B కి ఎక్కువ జీతం బిల్లు కలదని చెప్పవచ్చు

www.sakshieducation.com

8. 20 పరిశీలనల విస్తృతి 5. ప్రతి పరిశీలను 2 చే గుణించినపుడు వచ్చే విస్తృతి ని కనుగొనుము.

Sol. $x_1, x_2, ..., x_n$ ల మధ్యమం $\bar{x}$ అనుకొందాం.

$n = 20$, విస్తృతి = 5

కాబట్టి $\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2 = 5$ or $\sum_{i=1}^{20}(x_i-\bar{x})^2 = 100$ ...(1)

ప్రతి పరిశీలను 2 చే గుణించినపుడు కొత్త పరిశీలనలు

$y_i = 2x_i,\ i = 1, 2, ..., 20$ or $x_i = y_i/2$

$$\bar{y} = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} y_i = \frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} 2x_i = 2\cdot\frac{1}{20}\sum_{i=1}^{20} x_i = 2\bar{x} \text{ or } \bar{x} = \frac{1}{2}\bar{y}$$

$x_i, \bar{x}$ లను (1) లో ప్రతి క్షేపించగా

$$\sum_{i=1}^{20}\left(\frac{1}{2}y_i - \frac{1}{2}\bar{y}\right)^2 = 100 \text{ i.e., } \sum_{i=1}^{20}(y_i-\bar{y})^2 = 400$$

అప్పుడు,ఫలితంగా వచ్చే పరిశీలనల విస్తృతి $= \frac{1}{20}\times 400 = 20 = 2^2\times 5$.

9. పరిశీలనలు లలో ప్రతిదాన్ని కి పెంచితే లేదా కలిపితే (ఒక ధనాత్మక లేదా రుణాత్మక సంఖ్య), వచ్చే పరిశీలనల విస్తృతి ఏమీ మారదని చూపండి

Sol. $x_1, x_2, ..., x_n$ ల మధ్యమం $\bar{x}$ అనుకొందాం అప్పుడు వాటి విస్తృతి

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2.$$

ప్రతి పరిశీలనకు ఒక స్థిరరాశి కలిపితే, వచ్చే కొత్త పరిశీలనలు

$y_i = x_i + k$ ...(1)

అప్పుడు కొత్త పరిశీలనల మధ్యమం $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i+k) = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} k\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}(nk) = \bar{x} + k \qquad ...(2)$$

కొత్త పరిశీలనల విస్తృతి= $\sigma_2^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i+k-\bar{x}-k)^2, \quad (1), (2)$$

$$= \frac{1}{n}(x_i-\bar{x})^2 = \sigma_1^2.$$

కొత్త పరిశీలనల విస్తృతి, తొలి పరిశీలనల విస్తృతికి సమానం

www.sakshieducation.com

10.10 ఇన్నింగులలో A,Bఅనే ఇద్దరు క్రికెట్ ఆటగాళ్ళ స్కోరులు ఈ కింది ఇవ్వడమైంది. వీరిలో ఎవరు ఎక్కువ పరుగులు సాధించే ఆటగాడో, ఎవరు నిలకడ గల ఆటగాడో కనుక్కోండి

A స్కోరులు : x_i	40	25	19	80	38	8	67	121	66	76
B స్కోరులు: y_i	28	70	31	0	14	111	66	31	25	4

Sol. A అంక మధ్యమం: $\bar{x} = \frac{540}{10} = 54$

B అంక మధ్యమం : $\bar{y} = \frac{380}{10} = 38$

x_i	(x_i-median)	(x_i-median)^2	y_i	(y_i- y median)	(y_i - y median)^2
40	–14	196	28	–10	100
25	29	841	70	32	1024
19	–35	1225	31	–7	49
80	26	676	0	–38	1444
38	–16	256	14	–24	576
8	–46	2116	111	73	5329
67	13	169	66	28	784
121	67	4489	31	–7	49
66	12	144	25	–13	169
76	22	484	4	–34	1156
$\Sigma x_i = 540$		10596	$\Sigma y_i = 380$		10680

A స్కోరుల ప్రామాణిక విచలనం $= \sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{10596}{10}} = \sqrt{1059.6} = 32.55$

స్కోరుల ప్రామాణిక విచలనం B = $\sigma_y = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{\frac{10680}{10}} = \sqrt{1068} = 32.68$

A విచలనాంకం$= \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \times 100 = \frac{32.55}{54} \times 100 = 60.28$

B విచలనాంకం $= \frac{\sigma_y}{\bar{y}} \times 100 = \frac{32.68}{38} \times 100 = 86$

$\bar{x} > \bar{y}$, కనుక A ఎక్కువ స్కోరు సాధించే ఆటగాడు A is a better run getter (scorer).

A విచలనాంకం< B విచలనాంకం కాబట్టి ఎక్కువ నిలకడగల ఆటగాడు కూడా.

www.sakshieducation.com

Properties of Triangles

త్రిభుజ ధర్మాలు

1. Sine rule : In ΔABC, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$, R పరివృత్త వ్యాసార్ధం .

$\Rightarrow a = 2R \sin A,\ b = 2R \sin B,\ c = 2R \sin C$

$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C.$

2. Cosine rule : In ΔABC,

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ac \cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

or

$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$; $\cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$; $\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ $\Rightarrow \cos A : \cos B : \cos C.$

$= a(b^2 + c^2 - a^2) : b(c^2 + a^2 - b^2) : c(a^2 + b^2 - c^2)$

3. ΔABC లో

$a = b \cos C + c \cos B,\ b = c \cos A + a \cos C,\quad c = a \text{ Cos } B + b\cos A$

4. Mollwiede's rule : In ΔABC

$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$, $\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$.

5. Tangent rule (or) Napier's analogy : In ΔABC

$\tan\frac{A-B}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$;

$\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}$;

$\tan\frac{C-A}{2} = \frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2}$

6. i. $\sin\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{(s-b)(s-c)}}{bc}$; $\sin\frac{B}{2} = \frac{\sqrt{(s-c)(s-a)}}{ca}$; $\sin\frac{C}{2} = \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)}}{ab}$.

ii. $\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$; $\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$; $\cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

www.sakshieducation.com

iii. $\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}}$; $\tan\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{\Delta}}$;

$\tan\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}}$

iv. $\cot\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{(s-b)(s-c)}} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{\Delta}}$;

$\cot\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-c)(s-a)}} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{\Delta}}$; $\cot\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{\Delta}}$

7. $\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4\Delta}$; $\cot B = \frac{c^2+a^2-b^2}{4\Delta}$; $\cot C = \frac{a^2+b^2-c^2}{4\Delta}$.

8. ΔABC వైశాల్యం

i. $\Delta = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ca\sin B$

ii. $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

iii. $\Delta = \frac{abc}{4R}$

iv. $\Delta = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$

v. $\Delta = rs$

vi. $\Delta = \sqrt{r\, r_1\, r_2\, r_3}$

9. త్రిభుజం ABC లో

i. $r = \frac{\Delta}{s}$, $r_1 = \frac{\Delta}{s-a}$, $r_2 = \frac{\Delta}{s-b}$, $r_3 = \frac{\Delta}{s-c}$

ii. $r = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$r_1 = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\cos\frac{C}{2}$

$r_2 = 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$

$r_3 = 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

iii. $r = (s-a)\tan\frac{A}{2} = (s-b)\tan\frac{B}{2} = \tan(s-c)\frac{C}{2}$

$r_1 = s\tan\frac{A}{2} = (s-b)\cot\frac{C}{2} = (s-c)\cot\frac{B}{2}$

www.sakshieducation.com

$r_2 = s \tan\frac{B}{2} = (s-c)\cot\frac{A}{2} = (s-a)\cot\frac{C}{2}$

$r_3 = s \tan\frac{C}{2} = (s-a)\cot\frac{B}{2} = (s-b)\cot\frac{A}{2}$

10. i) $\frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}$

    ii) $rr_1r_2r_3 = \Delta^2$

11. i) $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = s^2$

    ii) $r(r_1 + r_2 + r_3) = ab + bc + ca - s^2$.

    i) $(r_1 - r)(r_2 + r_3) = a^2$

    $(r_2 - r)(r_3 + r_1) = b^2$

    $(r_3 - r)(r_1 + r_2) = c^2$

    ii) $a = (r_2 + r_3)\sqrt{\frac{rr_1}{r_2r_3}}$, $b = (r_3 + r_1)\sqrt{\frac{rr_2}{r_3r_1}}$, $c =)r_1 + r_2)\sqrt{\frac{rr_3}{r_1r_2}}$

12. i) $r_1 - r = 4R\sin^2\frac{A}{2}$, $r_2 - r = 4R\sin^2\frac{B}{2}$, $r_3 - r = 4R\sin^2\frac{C}{2}$

    ii) $r_1 + r_2 = 4R\cos^2\frac{C}{2}$, $r_2 + r_3 = 4R\cos^2\frac{A}{2}$, $r_3 + r_1 = 4R\cos^2\frac{B}{2}$

13. $r_1 + r_2 + r_3 = 4R$, $r + r_2 + r_3 - r_1 = 4R\cos A$, $r + r_3 + r_2 - r_2 = 4R\cos B$,

    $r + r_1 + r_2 - r_3 = 4R\cos C$

14. ‘a’ భుజం గా గల సమబాహు త్రిభుజం లో

    i) area = $\frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ ii) $R = a / \sqrt{3}$

    iii) $r = R / 2$ iv) $r_1 = r_2 + r_3 = 3R / 2$

    v) $r : R : r_1 = 1 : 2 : 3$

www.sakshieducation.com

అతిస్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. ఒక త్రిభుజం యొక్క భుజాలు 3,4,5 ఐతే త్రిభుజ పరివృత్త వ్యాసార్ధాన్ని కనుగొనండి.

Sol. త్రిభుజం యొక్క భుజాలు 3,4,5

$3^2+4^2=5^2$ కావున త్రిభుజం లంబ కోణ త్రిభుజం మరియు దాని విక్ణం =5

పరివృత్త వ్యాసార్ధం = $\frac{1}{2}.(hypotenuse)=\frac{5}{2}$

2. $\sum a(\sin B-\sin C)=0$ అని చూపుము

Solutoin: -

$$\sum 2R\sin A(\sin B-\sin C) \because a=2R\sin A$$

$$2R\{\sin A(\sin B-\sin C)+\sin B(\sin C-\sin A)+\sin C(\sin A-\sin B)\}=0$$

3. $a=\sqrt{3}+1\,cms$ $\angle B=30^0$ $\angle C=45^0$ అయితే ని C ను కనుగొనుము

$\angle B=30^0$ $\angle C=45^0$ but $A+B+C=180^0 \Rightarrow A+75^0=180^0$

$A=105^0$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}+1}{\sin 105^0}=\frac{C}{\sin 45^0}\Rightarrow\frac{\sqrt{3}+1}{\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)}=\frac{C}{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}$$

4. a = 2 , b = 3, c = 4 అయితే cos A ను కనుగొనుము

Solution : -

కొసైన్ సూత్రం నుండి $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$\cos A=\frac{9+16-4}{2\times3\times4}\Rightarrow\cos A=\frac{21}{24}=\frac{7}{8}$$

www.sakshieducation.com

5. a = 26, b = 30 $\cos C = \frac{63}{65}$ అయితే ని C ను కనుగొనుము

Solution : -

From cosine rule $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos c$

$$c^2 = (26)^2 + (30)^2 - 2(26)(30)\frac{63}{65} \Rightarrow c^2 = 676 + 900 - 1512$$

5

$$c^2 = 64 \Rightarrow c = 8$$

6. ఒక త్రిభుజం లో కోణాలు 1 : 5 : 6 నిష్పత్తి లో ఉంటే భుజాల నిష్పత్తి కనుగొనుము

Solution : -

A = x B = 5x C = 6x

$$A + B + C = 180^0 \Rightarrow 12x = 180^0 \Rightarrow x = 15^0$$

$$\therefore A = 15^0 \quad B = 5\times 15^0 \quad C = 6\times 15^0$$

$$A = 15^0 \quad B = 75^0 \quad C = 90^0$$

భుజాల నిష్పత్తి $= a : b : c = 2R\sin A : 2R\sin B : 2R\sin C$

$$= \sin A : \sin B : \sin C$$

$$= \sin 15^0 : \sin 75^0 : \sin 90^0 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} : 1$$

$$= \left(\sqrt{3}-1\right) : \left(\sqrt{3}+1\right) : 2\sqrt{2}$$

7. $2\{bc\cos A + ca\cos B + ab\cos C\} = a^2 + b^2 + c^2$ అని నిరూపించుము.

L.H.S= $2bc\cos A + 2ca\cos B + 2ab\cos c$

From cosine rule $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

$$\cos c = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$\therefore 2bc\frac{\{b^2 + c^2 - a^2\}}{2bc} + 2ac\left\{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}\right\} + 2ab\frac{\{a^2 + b^2 - c^2\}}{2ab}$$

$$b^2 + c^2 - a^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

www.sakshieducation.com

8. $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{c^2+a^2-b^2}=\dfrac{\tan B}{\tan C}$ అని నిరూపించుము.

$$\tan B=\frac{\sin B}{\cos B}=\frac{\left(\frac{b}{2R}\right)}{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}=\frac{b}{2\text{R}}\times\frac{2ac}{a^2+c^2-b^2}=\frac{2(4R^2 4)}{2R\left(a^2+c^2-b^2\right)}\{\because abc=4R\Delta\}$$

$$\tan B=\frac{4\Delta}{a^2+c^2-b^2} \qquad |||^{ly}\ \tan C=\frac{4\Delta}{a^2+b^2-c^2}$$

$$\text{R.H.S}\ \frac{\tan B}{\tan C}=\frac{\frac{4\Delta}{a^2+c^2-b^2}}{\frac{4\Delta}{a^2+b^2-c^2}}=\frac{a^2+b^2-c^2}{a^2+c^2-b^2}$$

9. $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$ అని నిరూపించుము.

Solution : -

$(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C$

$b\cos A+\text{c}\cos A+\text{c}\cos B+a\cos B+a\cos c+b\cos c$

$(b\cos A+a\cos B)+(b\cos c+c\cos B)+(c\cos A+a\cos c)$

c +a +b {from projection rule}

$=a+b+c$

9. $(b-a\cos c)\sin A=a\cos A\sin c$ అని నిరూపించుము.

Solution : -

విక్షేపణ సూత్రం నుండి $b=a\cos c+c\cos A$

L.H.S $=(a\cos C+c\cos A-a\cos C)\sin A=c\cos A\sin A$

$=2R\sin C\cos A\sin A$

$=(2R\sin A)\cos A\sin C$

$=a\cos A\sin C$

10. If 4, 5 are two sides of a triangle and the include angle is 60^0 find the area

Solution: -

Given b = 4 C = 5 A = 60^0

Area of triangle $\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\times5\sin60^0=5\sqrt{3}$

www.sakshieducation.com

11. $b\cos^2\frac{C}{2}+\cos^2\frac{B}{2}=S$ అని చూపుము

Solution : -

$$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{S(S-C)}{ab}}\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{S(S-b)}{ac}}$$

$$b\cos^2\frac{C}{2}+c\cos^2\frac{B}{2}=b\frac{S(S-C)}{ab}+\ c\frac{S(S-b)}{ac}$$

$$=\frac{S}{a}\{s-c+s\}=\frac{s}{a}[2s-b-c]=\frac{s}{a}\{a+\not{b}+\not{c}-\not{b}-\not{c}\}$$

$$=S$$

12. $\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$ ఐతే ABC సమబాహు త్రిభుజం అని చూపుము

Solution: -

$$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos A}\Rightarrow\frac{2R\sin A}{\cos A}=\frac{2R\sin B}{\cos B}=\frac{2R\sin C}{\cos C}$$

$$\tan A=\tan B=\tan C\Rightarrow A=B=C$$

$\therefore$ Triangle ABC is equilateral

13. Σ a cot A = 2(R + r) అని చూపుము

Sol. $\Sigma a\cot A=\Sigma 2R\sin A\frac{\cos A}{\sin A}$

$$=2R\Sigma\cos A$$

$$=2R\left(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)$$

$$=2\left(R+4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)=2(R+r)$$

www.sakshieducation.com

14. ΔABC లో $r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R$ అని చూపుము.

Sol. $r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$

$$-4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right] + 4R\cos\frac{A}{2}\left[\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B+C}{2}\right) + 4R\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{A}{2} + 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

$$= 4R\left[\sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2}\right]$$

$$= 4R \left(\because \sin^2\frac{A}{2} + \cos^2\frac{A}{2} = 1\right)$$

15. $\frac{c - b\cos A}{b - \cos A} = \frac{\cos B}{\cos C}$ అని చూపుము

Hint: విక్షేపణ సూత్రాలనుండి $C = b\ \text{coA} + a\ \text{cosB}$

$$b = a\cos C + C\cos A$$

16. $a\{b\cos C - c\cos B\} = b^2 - c^2$ అని చూపుము

Solution : -

$$a\{b\cos c - c\cos B\} = ab\cos c - ac\cos B$$

R.H.S లో $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}$, $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac}$ ప్రతి క్షేపించండి.

17. ΔABC లో $\Sigma(b + c)\cos A = 2s$ అని చూపుము

Sol. L.H.S.

$= (b + c)\cos A + (c + a)\cos B + (a + b)\cos C$

$= (b\cos A + a\cos B) + (c\cos B + b\cos C) + (a\cos C + c\cos A)$

www.sakshieducation.com

$= c + a + b = 2s = R.H.S.$

18. ΔABC లో $(a + b + c), (b + c - a) = 3bc$ అయితే A కనుగొనుము .

Sol. $2s(2s - 2a) = 3bc$

$$\Rightarrow \frac{s(s-a)}{bc} = \frac{3}{4} \Rightarrow \cos^2\frac{A}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos\frac{A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30°$$

$$\therefore \frac{A}{2} = 30° \Rightarrow A = 60°$$

18. ΔABC లో $\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r}$ అని చూపుము

Sol. $L.H.S. = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} = \frac{s-a}{\Delta} + \frac{s-b}{\Delta} + \frac{s-c}{\Delta}$

$$= \frac{3s-(a+b+c)}{\Delta} = \frac{3s-2s}{\Delta} = \frac{s}{\Delta} = \frac{1}{r} = R.H.S.$$

19. ΔABC లో $rr_1r_2r_3 = \Delta^2$ అని చూపుము

Sol. $L.H.S. = rr_1r_2r_3 = \frac{\Delta}{s} \cdot \frac{\Delta}{s-a} \cdot \frac{\Delta}{s-b} \cdot \frac{\Delta}{s-c}$

$$= \frac{\Delta^4}{\Delta^2} = \Delta^2 = R.H.S.$$

20. ఒక సమబాహు త్రిభుజం లో $\frac{r}{R}$ విలువ కనుగొనుము

Sol. $\frac{r}{R} = \frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R} = 4\sin^2 30°$

$$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \quad (\because A = B = C = 60°)$$

21. If $rr_2 = r_1r_3$ఐతే, Bకనుగొనుము.

Sol. $rr_2 = r_1r_3 \Rightarrow \frac{\Delta}{s} \cdot \frac{\Delta}{s-b} = \frac{\Delta}{s-a} \cdot \frac{\Delta}{s-c}$

$$\Rightarrow (s-a)(s-c) = s(s-b)$$

www.sakshieducation.com

$$\Rightarrow \frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)} = 1 \Rightarrow \tan^2\frac{B}{2} = 1$$

$$\Rightarrow \tan\frac{B}{2} = 1 \Rightarrow \frac{B}{2} = 45° \Rightarrow B = 90°$$

22. A = 90° ఐతే 2(r + R) = b + c అని చూపుము

Sol. L.H.S. = 2r + 2R = 2(s – a) $\tan\frac{A}{2} + 2R \cdot 1$

= 2(s – a) tan 45° + 2R sin A

= (2s – 2a)1 + a (∵ A = 90°)

= b + c

= R.H.S.

23. త్రిభుజం లో $\sum r_1 \cot\frac{A}{2}$ ను S లో వ్రాయండి S

Solution : -

$$\sum r_1 \cot A/2 = r_1 \cot A/2 + r_2 \cot B/2 + r_3 \cot\frac{C}{2}$$

$$r_1 = s\tan A/2 \quad r_2 = s\tan B/2 \quad r_3 = s\tan C/2$$

$$= s\tan\frac{A}{2}\cot A/2 + s\tan B/2\cot B/2 + s\tan\frac{C}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$= s + s + s = 3s$$

24. $\sum \frac{r_1}{(s-b)(s-c)} = \frac{3}{r}$ అని చూపుము

Solution : - $\sum \frac{r_1}{(s-b)(s-c)} = \frac{r_1}{(s-b)(s-c)} + \frac{r_2}{(s-c)(s-a)} + \frac{r_3}{(s-a)(s-b)}$

But $r_1 = \frac{\Delta}{s-a}$ $r_2 = \frac{\Delta}{s-b}$ $r_3 = \frac{\Delta}{s-c}$

$$= \frac{\Delta}{(s-a)(s-b)(s-c)} + \frac{\Delta}{(s-a)(s-b)(s-c)} + \frac{\Delta}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

www.sakshieducation.com

$$= \frac{3\Delta s}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{3\not{\Delta} s}{\Delta^2} = \frac{3}{\left(\frac{\Delta}{s}\right)} = \frac{3}{r}$$

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు

1. త్రిభుజం ABC లో $a\cos A + b\cos B + C\cos c = 4R\sin A\sin B\sin C$ అని చూపుము

Solution : -

L.H.S $= a\cos A + b\cos B + C\cos C = 2R\sin A\cos A + 2\sin B\cos B + 2R\sin C\cos C$

$= R\{\sin 2A + \sin^2 B + \sin^2 C\}$

Given that $A + B + C = 180^0$

$\therefore L.H.S = R\{\sin(A+B)\cos(A-B) + \sin 2C\}$

$= R\{2\sin C\cos(A-B) + 2\sin C\cos C\} = 2R\sin C\{\cos(A-B) + \cos C\}$

$= 2R\sin C\{\cos(A-B) + \cos(180^0 - \overline{A+B})\}$

$= 2R\sin C\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\} = 4R\sin A\sin B\sin C$

2. $\sum a^3\sin(B-C) = 0$ అని చూపుము

Solution : -

$\sum a^3\sin(B-C) = \sum (2R\sin A)^3\sin(B-C) = 8R^3\sum \sin^3 A\sin(B-C)$

$8R^3\sum \sin^2 A\sin A\sin(B-C) = 8R^3\sum \sin^2 A\sin(180^0 - B + \overline{C})\sin(B-C)$

$\{\because A = 180^0 - \overline{B+C}\}$

$= 8R^3\sum \sin^2 A\sin(B+C).\sin(B-C) = 8R^3\sum \sin^2 A(\sin^2 B - \sin^2 C)$

$= 8R^3\{\sin^2 A(\sin^2 B - \sin^2 C) + \sin^2 B(\sin^2 C - \sin^2 A) + \sin^2 C(\sin^2 A - \sin^2 B)\}$

$= 0$

www.sakshieducation.com

3. త్రిభుజంABC లో $\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{b\sin(C-A)}{C^2-a^2}=\frac{C\sin(A-B)}{a^2-b^2}$ అని చూపుము

Solution : -

$$\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{2R\sin A\sin(B-C)}{4R^2\{\sin^2 B-\sin^2 C\}}\begin{Bmatrix}\because a=2R\sin A : b=2R\sin B\\ C=2R\sin C \ \ from\ sin\,e\ Rule\end{Bmatrix}$$

$$\frac{1}{2R}\ \frac{\sin(B+C).\sin(B-C)}{\sin^2 B-\sin^2 C}\{\because \sin A\ =\sin(B+C)\ In\ a\ triangle\ ABC\}$$

$$\frac{1}{2R}\ \frac{\sin^2 B-\sin^2 C}{\sin^2 B-\sin^2 C}=\frac{1}{2R}$$

ఇదేవిధంగా $\frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}=\frac{1}{2R}$ and $\frac{C\sin(A-B)}{a^2-b^2}=\frac{1}{2R}$ అని చూపగలము

4. $\frac{a}{bc}+\frac{\cos A}{a}=\frac{b}{ca}+\frac{\cos B}{b}=\frac{c}{ab}+\frac{\cos C}{c}$ అని చూపుము

Solution : -

$$\frac{a}{bc}+\frac{\cos A}{a}=\frac{a^2+bc\cos A}{abc}$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\frac{a^2+bc\cos A}{abc}=\frac{a^2+\frac{\cancel{bc}\left[b^2+c^2-a^2\right]}{2bc}}{abc}=\frac{2a^2+b^2+c^2-a^2}{2abc}$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

$$|||^{ly}\ \frac{b}{ca}+\frac{\cos B}{b}=\frac{b^2+ac\cos B}{abc}=\frac{b^2+\frac{\cancel{ac}\left(a^2+c^2-b^2\right)}{2\cancel{ac}}}{abc}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

$$|||^{ly}\ \frac{c}{ab}+\frac{\cos c}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$$

www.sakshieducation.com

5. $\dfrac{1+\cos(A-B)\cos C}{1+\cos(A-C)\cos B} = \dfrac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$ అని చూపుము

Solution : -

త్రిభుజంABC లో $A+B+C=180^0 \Rightarrow C = 180^0 - \overline{A+B}$

$B = \left(180^0 - \overline{A+C}\right)$

$$\frac{1+\cos(A-B)\cos C}{1+\cos(A-C)\cos B} = \frac{1+\cos(A-B)\cos\left(180^0-\overline{A+D}\right)}{1+\cos(A-C).\cos\left(180^0-A+C\right)}$$

$$= \frac{1-\cos(A-B)\cos(A+B)}{1-\cos(A-C)\cos(A+C)} = \frac{1-\left\{\cos^2 A - \sin^2 B\right\}}{1-\left\{\cos^2 A-\sin^2 C\right\}}$$

$$= \frac{1-\cos^2 A+\sin^2 B}{1-\cos^2 A+\sin^2 C} = \frac{\sin^2 A+\sin^2 B}{\sin^2 A+\sin^2 C} = \frac{\dfrac{a^2}{4R^2}+\dfrac{b^2}{4R^2}}{\dfrac{a^2}{4R^2}+\dfrac{c^2}{4R^2}} = \frac{a^2+b^2}{a^2+c^2}$$

6. $C = 60^0$ అయితే (i) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}=1$ (ii) $\dfrac{b}{c^2-a^2}+\dfrac{a}{c^2-b^2}=0$ అని చూపుము

Solution : -

Given $C = 60^0$

$C^2 = a^2+b^2-2ab\cos C$

$C^2 = a^2+b^2-2ab\left(\dfrac{1}{2}\right)$

$C^2+ab = a^2+b^2$

$\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a} =$

$$\frac{ac+a^2+bc+b^2}{(b+c)(c+a)} = \frac{a^2+b^2+ac+bc}{bc+ab+c^2+ac}$$

But $a^2+b^2 = c^2+ab$

$$\frac{c^2+ab+ac+bc}{bc+ab+c^2+ac} = 1$$

www.sakshieducation.com

(ii) $$\frac{b}{c^2-a^2}+\frac{a}{c^2-b^2}=0\Rightarrow\frac{b\{c^2-b^2\}+a\{c^2-a^2\}}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

$$=\frac{bc^2-b^3+ac^2-a^3}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=\frac{c^2(a+b)-(a+b)\{a^2+b^2-ab\}}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

$$=\frac{(a+b)\left[c^2-\{a^2+b^2-ab\}\right]}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=\frac{(a+b)\left[c^2-(c^2+\cancel{ab}-\cancel{ab})\right]}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

= 0

7. త్రిభుజంABC లో $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ ఐతే $c=60^0$ అని చూపుము

Solution : -

Given $$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$$

$$\frac{a+b+c}{a+c}+\frac{a+b+c}{b+c}=3$$

$$\frac{(a+c)+b}{a+c}+\frac{a+(b+c)}{b+c}=3\Rightarrow\frac{\cancel{a}+c}{\cancel{a}-c}+\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}+\frac{\cancel{b+c}}{\cancel{b+c}}=3$$

$$\frac{b}{a+c}+\frac{a}{b+c}=1\Rightarrow\frac{b^2+bc+a^2+ac}{ab+ac+bc+c^2}=1$$

$$a^2+b^2-c^2=ab\Rightarrow 2ab\cos C=ab\ \{\because a^2+b^2-c^2=2abc\cos C\}$$

$$\cos C=\frac{ab}{2ab}=\frac{1}{2}\Rightarrow C=60^0\ \cos C=\frac{\cancel{ab}}{\cancel{2ab}}=\frac{1}{2}\Rightarrow C=60^0$$

8. a : b : c = 7 : 8 : 9 ఐతే $\cos A:\cos B:\cos C$ కనుగొనుము

Soltion : -

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{64k^2+81k^2-49k^2}{2(8k)(9k)}=\frac{\cancel{96k^2}^{12}}{2\times\cancel{8k}\times 9\cancel{k}}$$

$$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{49k^2+81k^2-64k^2}{2\times 7k\times 9k}=\frac{66^{33}}{\cancel{2}\times 63}=\frac{11}{21}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{49k^2+64k^2-81k^2}{2\times 7k\times 8k}=\frac{32k^2}{20k\times 8k}=\frac{2}{7}$$

$$\therefore \cos A=\cos B=\text{co}\,C=\frac{2}{3}=\frac{11}{21}=\frac{2}{7}=\frac{2}{3}\times 21=\frac{11}{21}\times 21=\frac{2}{7}\times 21$$

$=14:11:6$

www.sakshieducation.com

9. $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$ అని చూపుము

LHS $\frac{\cos A}{a}+\frac{\cos B}{b}+\frac{\cos C}{c}=\frac{bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C}{abc}$

$=\frac{2bc\cos A+2ca\cos B+2ab\cos C}{2bac}$

$=\frac{b^2+c^2-\cancel{a^2}+\cancel{a^2}+\cancel{c^2}-\cancel{b^2}+a^2+\cancel{b^2}-\cancel{c^2}}{2abc}$

$\left\{\begin{array}{l}\because 2bc\cos A=b^2+c^2-a^2 : 2ac\cos B=a^2+c^2-b^2\\ 2ab\cos c=a^2+b^2+c^2\end{array}\right\}$

$=\frac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$

10. $(b-a)\cos c+c(\cos B-\cos A)=c\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos ec\left(\frac{A+B}{2}\right)$ అని చూపుము

Solution : -

$(b-a)\cos c+c\{\cos B-\cos A\}$

$b\cos c-a\cos c+\cos B-\cos A=(b\cos c+\cos B)-ca\cos C+\cos A$

$=a-b$ (విక్షేపణ సూత్రాలనుండి)

$=2R\{\sin A-\sin B\}$

$=2R\left\{2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\right\}$

$\frac{2R\left\{2\sin\frac{C}{2}\sin\left(\frac{A-R}{2}\right)\right\}\cos\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}=\frac{2R\left\{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\right\}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\cos\frac{C}{2}}$

$=\frac{2R\sin C\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)}=c\sin C\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\cos ec\left(\frac{A+B}{2}\right)$

$\left\{\begin{array}{l}\because \textit{In a triangle ABC}\\ \frac{C}{2}=\left(90^0-\frac{\overline{A+B}}{2}\right);\frac{A+B}{2}=90^0-\frac{C}{2}\end{array}\right\}$

www.sakshieducation.com

11. $a\sin^2\frac{C}{2}+c\sin^2\frac{A}{2}=\not{a}\frac{(s-a)(s-b)}{\not{a}b}+c\frac{(s-b)(s-c)}{bc}$

$\frac{(s-b)\{s-a+s-c\}}{b}$

$\frac{(s-b)\{2s-ac\}}{b}=\frac{(s-b)\{\not{a}+b+\not{c}-\not{a}-\not{c}\}}{b}=(s-b)$

12. $b+c=3a$ ఐతే $\cot\frac{B}{2}\cot\frac{c}{2}$ కనుగొనుము

Solution : -

$\cot\frac{B}{2}\cot\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}$

$=\sqrt{\frac{s(s-b)}{(s-a)(s-c)}\cdot\frac{s(s-c)}{(s-a)(s-b)}}=\frac{s}{s-a}=\frac{2s}{2(s-a)}$

$=\frac{b+c+a}{b+c-a}=\frac{3a+a}{3a-a}=\frac{4a}{2a}=2$

13. $(b-c)^2\cos^2\frac{A}{2}+(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}=a^2$ అని చూపుము

Solution : -

$(b-c)^2\cos^2\frac{A}{2}+(b+c)^2\sin^2\frac{A}{2}$

$\{b^2+c^2-2bc\}\cos^2\frac{A}{2}+\{b^2+c^2+2bc\}\sin^2\frac{A}{2}$

$b^2\left\{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\right\}+c^2\left\{\cos^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{A}{2}\right\}-2bc\left\{\cos^2\frac{A}{2}-\sin^2\frac{A}{2}\right\}$

$b^2+c^2-2bc\cos A=a^2$ (from cosine rule)

$|||^{ly}$ prove that (i) $(c-a)^2\cos^2\frac{C}{2}+(c+a)^2\sin^2\frac{B}{2}=b^2$

(ii) $(a-b)^2\cos^2\frac{c}{2}+(a+b)^2\sin^2\frac{C}{2}=c^2$]

www.sakshieducation.com

14. త్రిభుజంABC లో $r + r_1 + r_2 - r_3 = 4R\cos C$ అని చూపుము

Sol.

$$r + r_1 + r_2 - r_3 = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right] + 4R\cos\frac{A}{2}\left[\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} - \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\right]$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) + 4R\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= 4R\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) + 4R\sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$= 4R\left[\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right) + \sin\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\right]$$

$$= 4R\cos\left(\frac{B+C}{2} - \frac{B-C}{2}\right)$$

$$= 4R\cos\left(\frac{B+C-B+C}{2}\right)$$

$$= 4R\cos\frac{2C}{2} = 4R\cos C$$

15. $r_1 + r_2 + r_3 = r$ ఐతే $\angle C = 90^\circ$ అని చూపుము

Sol. $r_1 + r_2 = r - r_3 \Rightarrow \dfrac{r_1 + r_2}{r - r_3} = 1 \quad \ldots(1)$

$$r_1 + r_2 = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + 4R\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 4R\cos\frac{C}{2}\left[\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} + \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right]$$

$$= 4R\cos\frac{C}{2}\left[\sin\frac{A+B}{2}\right]$$

$$= 4R\cos\frac{C}{2}\cdot\cos\frac{C}{2}$$

$$= 4R\cos^2\frac{C}{2}$$

www.sakshieducation.com

$$r - r_3 = 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} - 4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= 4R\sin\frac{C}{2}\left[\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2} - \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right]$$

$$= 4R\sin\frac{C}{2}\left[-\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]$$

$$= 4R\sin\frac{C}{2}\left[-\sin\frac{C}{2}\right]$$

$$= -4R\sin^2\frac{C}{2}$$

$$\frac{r - r_3}{r_1 + r_2} = \frac{4R\sin^2\frac{C}{2}}{4R\cos^2\frac{C}{2}} = \tan^2\frac{C}{2}$$

$$\therefore \tan^2\frac{C}{2} = \tan 45° \qquad \text{From}(1)$$

$$\frac{C}{2} = 45° \qquad \therefore \angle C = 90°$$

16. $4(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) = (a + b + c)^2$ అని నిరూపించండి .

Sol. $4(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1) = 4\left[\frac{\Delta}{S-a}\cdot\frac{\Delta}{S-b} + \frac{\Delta}{S-b}\cdot\frac{\Delta}{S-c} + \frac{\Delta}{S-c}\cdot\frac{\Delta}{S-a}\right]$

$$= 4\Delta^2\left[\frac{S-c+S-a+S-b}{(S-a)(S-b)(S-c)}\right]$$

$$= 4\Delta^2\left[\frac{3S-(a+b+c)}{(S-a)(S-b)(S-c)}\right]$$

$$= 4\Delta^2\left[\frac{S^2}{S(S-a)(S-b)(S-c)}\right]$$

$$= 4\Delta^2\frac{S^2}{\Delta^2} = 4S^2$$

$$= (2S)^2 = (a+b+c)^2$$

17. $\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3}\right) = \frac{abc}{\Delta^3} = \frac{4R}{r^2S^2}$ అని నిరూపించండి .

Sol. $\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} = \frac{S}{\Delta} - \frac{S-a}{\Delta} = \frac{S-S+a}{\Delta} = \frac{a}{\Delta}$

ఇదేవిధంగా

www.sakshieducation.com

$$\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}=\frac{b}{\Delta} \text{ and } \frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}=\frac{c}{\Delta}$$

$$\text{L.H.S.}=\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{r_3}\right)$$

$$=\frac{a}{\Delta}\frac{b}{\Delta}\frac{c}{\Delta}=\frac{abc}{\Delta^3}$$

$$=\frac{4R\cdot\Delta}{\Delta^3}=\frac{4R}{\Delta^2}=\frac{4R}{(rS)^2}=\text{R.H.S.}$$

18. $\dfrac{r_1(r_2+r_3)}{\sqrt{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_3}}=a$ అని నిరూపించండి

Solution : -

LHS

$$\frac{\frac{\Delta}{s-a}\left\{\frac{\Delta}{s+b}+\frac{\Delta}{s-c}\right\}}{\sqrt{\frac{\Delta^2}{(s-a)(s-b)}+\frac{\Delta^2}{(s-b)(s-c)}+\frac{\Delta^2}{(s-c)(s-a)}}}=\frac{\frac{\Delta^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}\{s-b+s-c\}}{\sqrt{\frac{\Delta^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}(s-a)(s-b)+(s-c)}}$$

$$\frac{\Delta^2}{(s-a)(s-b)(s-c)}\times\frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\Delta}\times\frac{a}{\sqrt{3s-2s}}$$

$$\frac{a\Delta}{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}=\frac{a\Delta}{\Delta}=a$$

19.$r(r_1 + r_2 + r_3) = ab + bc + ca - S^2$ అని నిరూపించండి

Sol. L.H.S. $= r(r_1 + r_2 + r_3)$

$$=\frac{\Delta}{S}\left(\frac{\Delta}{S-a}+\frac{\Delta}{S-b}+\frac{\Delta}{S-c}\right)$$

$$=\frac{\Delta^2}{S}\left[\frac{(S-b)(S-c)+(S-a)(S-c)+(S-a)(S-b)}{(S-a)(S-b)(S-c)}\right]$$

$$=\frac{\Delta^2}{\Delta^2}\left[\begin{array}{l}S^2-Sc-Sb+bc+S^2-Sc-Sa\\+ac+S^2-Sb-Sa+ab\end{array}\right]$$

www.sakshieducation.com

$= 3S^2 - 2S(a+b+c) + bc + ca + ab$

$= 3S^2 - 4S^2 + bc + ca + ab$

$= ab + bc + ca - S^2$

$=$ R.H.S.

20. $(r_1 + r_2)\tan\frac{C}{2} = (r_3 - r)\cot\frac{C}{2} = c$ అని నిరూపించండి

Sol. $(r_1 + r_2)\tan\frac{C}{2}$

$$= 4R\cos^2\frac{C}{2}\tan\frac{C}{2}$$

$$= 4R\cos^2\frac{C}{2}\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}$$

$$= 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2R\sin C = c \qquad ...(1)$$

$$(r_3 - r)\cot\frac{C}{2} = 4R\sin\frac{C}{2}\cot\frac{C}{2}$$

$$= 4R\sin^2\frac{C}{2}\frac{\cos\frac{C}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$= 4R\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

$$= 2R\sin C = c \qquad ...(2)$$

(1) , (2) ల నుండి

$$(r_1 + r_2)\tan\frac{C}{2} = (r_3 - r)\cot\frac{C}{2} = c$$

21. ΔABC లో a, b, c లు A.P. లో ఉండటానికి ఆవశ్యక పర్యాప్తం r_1, r_2, r_3 లు H.P.లో ఉంటాయని చూపుము

Sol. r_1, r_2, r_3 లు H.P. ఉన్నాయి $\Leftrightarrow \frac{1}{r_1}, \frac{1}{r_2}, \frac{1}{r_3}$ లు A.P. ఉంటాయి.

$\Leftrightarrow \frac{s-a}{\Delta}, \frac{s-b}{\Delta}, \frac{s-c}{\Delta}$. లు A.P. ఉంటాయి.

$\Leftrightarrow s-a, s-b, s-c$. లు A.P. ఉంటాయి.

www.sakshieducation.com

$\Leftrightarrow -a, -a, -c$ లు A.P. ఉంటాయి.

$\Leftrightarrow a, b, c$ లు A.P. ఉంటాయి.

22. A, A_1, A_2, A_3 లు త్రిభుజంయొక్క అంతర మరియు బాహ్య వృత్తాల వైశాల్యాలు అయితే $\frac{1}{\sqrt{A_1}}+\frac{1}{\sqrt{A_2}}+\frac{1}{\sqrt{A_3}}=\frac{1}{\sqrt{A}}$ అని చూపుము

Solution : -

Here $A=\pi r^2 \quad A_1=\pi r_1^2 \; ; A_2=\pi r_2^2 \; ; A_3=\pi r_3^2$

LHS $\frac{1}{\sqrt{A_1}}+\frac{1}{\sqrt{A_2}}+\frac{1}{\sqrt{A_3}}=\frac{1}{\sqrt{\pi r_1^2}}+\frac{1}{\sqrt{\pi r_2^2}}+\frac{1}{\sqrt{\pi r_3^2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\left\{\frac{s-a}{\Delta}+\frac{s-b}{\Delta}+\frac{s-c}{\Delta}\right\}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left\{\frac{3s-(a+b+c)}{\Delta}\right\}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{s}{\Delta}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\times\frac{1}{\left(\frac{\Delta}{s}\right)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{\pi r^2}}=\frac{1}{\sqrt{A}}$$

www.sakshieducation.com

దీర్ఘ సమాధాన ప్రశ్నలు

1. ΔABC లో , $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$ అని చూపుము

Solution : -

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\therefore \cot = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\sin A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc \sin A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{4\left\{\frac{1}{2} bc \sin A\right\}}$$

$$\cot A = \frac{b^2+c^2-a^2}{4\Delta} \left\{\because \Delta = \frac{1}{2} bc \sin A\right\}$$

$$|||^{ly} \quad \cot B = \frac{a^2+c^2-b^2}{4\Delta} \quad \cot c = \frac{a^2+b^2-c^2}{4\Delta}$$

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{b^2+c^2-a^2}{4\Delta} + \frac{a^2+c^2-b^2}{4\Delta} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4\Delta}$$

$$= \frac{b^2+c^2-\cancel{a^2}+\cancel{a^2}+\cancel{c^2}-\cancel{b^2}+a^2+\cancel{b^2}-\cancel{c^2}}{4\Delta}$$

$$= \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$$

2. $\cot\frac{A}{2} : \cot\frac{B}{2} \; \cot\frac{C}{2} = 3:5:7$ అయితే a : b : c = 6 : 5 : 4 అని చూపుము

Solution : -

$$\cot\frac{A}{2} : \cot\frac{B}{2} : \cot\frac{C}{2} = \frac{s(s-a)}{\Delta} : \frac{s(s-c)}{\Delta} = 6:5:4$$

$$\therefore s-a : s-b : s-c = 6:5=4$$

Let $s-a = 3k \quad s-b = 5k \quad s-c = 7k$

$$(s-a)+(s-b)+(s-c) = 3k+5k+7k$$

$$3s-2s = 15k \Rightarrow s = 15k$$

$$s-a = 3k \Rightarrow 15k - a = 3k \Rightarrow a = 12k$$

$$s-b = 5k \Rightarrow 15k - 5k = b \Rightarrow b = 10k$$

$$s-c = 7k \Rightarrow 15k - 7k = c \Rightarrow c = 8k$$

www.sakshieducation.com

$a:b:c=12k:10k:8k \Rightarrow a:b:c=6:5:4$

3. త్రిభుజంABC లో $(a+b+c)\left\{\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right\}=2c\cot\frac{C}{2}$ అని చూపుము

Solution : -

$$(a+b+c)\left[\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}\right]=2s\left\{\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}+\frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}\right\}$$

$$=\frac{2s(s-c)}{\Delta}\{s-b+s-a\}$$

$$=2\cot\frac{C}{2}\{2s-b-a\} \Rightarrow 2\cot\frac{C}{2}\{\not{a}+\not{b}+c-\not{b}-\not{a}\}$$

$$=2c\cot\frac{C}{2}$$

4. cos A + cos B + cos C = $1+\frac{r}{R}$ అని చూపుము

Sol. L.H.S. = cos A + cos B + cos C

$$=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$=1+\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R}$$

$$=1+\frac{r}{R}=\text{R.H.S.}$$

5. $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}=2+\frac{r}{2R}$ అని చూపుము

Sol. L.H.S. = $\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}$

$$=2+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

(from transformationsPROVE THIS IN EXAM)

$$=2+\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{2R}$$

$$=2+\frac{r}{2R}=\text{R.H.S.}$$

www.sakshieducation.com

6. $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{s^2}{\Delta}$ అని చూపుము

Solution : -

$$\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{s(s-a)}{\Delta}+\frac{s(s-b)}{\Delta}+\frac{s(s-c)}{\Delta}$$

$$=\frac{S}{\Delta}\{s-a+s-b+s-c\}=\frac{s}{\Delta}\{3s-(a+b+c)\}=\frac{s}{\Delta}(3s-2s)$$

$$=\frac{s}{\Delta}(s)=\frac{s^2}{\Delta}$$

7. $\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}=\frac{bc+ca+ab-s^2}{\Delta}$ అని చూపుము

Solution : -

$$\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{B}{2}+\tan\frac{C}{2}$$

$$\frac{(s-b)(s-c)}{\Delta}+\frac{(s-c)(s-a)}{\Delta}+\frac{(s-a)(s-b)}{\Delta}$$

$$\frac{s^2-cs-bs+bc+s^2-as-cs+ac+s^2-bs-as+ab}{\Delta}$$

$$\frac{3s^2-2as-2bs-2cs+bc+ca+ab}{\Delta}$$

$$\frac{bc+ca+ab+3s^2-2s(a+b+c)}{\Delta}=\frac{bc+ca+ab+3s^2-2s(2s)}{\Delta}$$

$$\frac{bc+ca+ab+3s^2-4s^2}{\Delta}=\frac{bc+ca+ab-s^2}{\Delta}$$

8. $\dfrac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}{\cot A+\cot B+\cot C}$ అని చూపుము

Solution : - $\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}=\frac{s(s-a)}{\Delta}+\frac{s(s-b)}{\Delta}+\frac{s(s-c)}{\Delta}$

$$\frac{s}{\Delta}\{s-a+s-b+s-c\}=\frac{s}{\Delta}\{3s-a-b-c\}=\frac{s}{\Delta}\times(3s-2s)=\frac{s^2}{\Delta}$$

www.sakshieducation.com

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{\sin A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{bc\sin A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{\Delta\left\{\frac{1}{2}bc\sin A\right\}}$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2}{4\Delta} \quad \left\{\because \frac{1}{2}bc\sin A = \Delta\right\}$$

$$\cot A + \cot B + \cot C = \frac{b^2+c^2-a^2}{4\Delta} + \frac{c^2+a^2-b^2}{4\Delta} + \frac{a^2+b^2-c^2}{4\Delta}$$

$$= \frac{b^2+c^2-a^2+c^2+a^2-b^2+a^2+b^2-c^2}{4\Delta} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$$

$$\frac{\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{B}{2}+\cot\frac{C}{2}}{\cot A+\cot B+\cot C} = \frac{\frac{s^2}{\Delta}}{\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}} = \frac{s^2}{\cancel{\Delta}} \times \frac{4\cancel{\Delta}}{a^2+b^2+c^2}$$

$$= \frac{4s^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(2s)^2}{a^2+b^2+c^2} = \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2} \,]$$

9. $\sum (a+b)\tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = 0$ అని చూపుము

Solution : -

$\sum (a+b)\tan\left(\frac{A-B}{2}\right)$ from Napiries Rules

$$\tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}$$

$$\therefore \sum (a+b)\tan\left(\frac{A-B}{2}\right) = \sum (\cancel{a+b})\left(\frac{a-b}{\cancel{a+b}}\right)\cot\frac{c}{2}$$

$$\sum \frac{(a-b)s(s-c)}{\Delta} = \frac{s}{\Delta}\sum (a-b)(s-c)$$

$$\frac{s}{\Delta}\sum s(a-b)-c(a-b)=0$$

$$\frac{s}{\Delta}\left[s(a-b)+s(b-c)+x(c-a)\right]-\left\{c(a-b)+b(c-a)+a(b-c)\right\} = 0$$

www.sakshieducation.com

10. $\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}+\frac{b+c}{b-c}\tan\frac{A}{2}=2\operatorname{cosec}(B-C)$ అని చూపుము

Solution : -

$$\frac{b-c}{b+c}\cot A/2+\frac{b+c}{b-c}\tan A/2$$

From Napiers Rule $\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}=\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)$

$$\frac{b+c}{b-c}\tan\frac{A}{2}=\cot\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$\therefore\ LHS=\tan\left(\frac{B-C}{2}\right)+\cot\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$=\frac{\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}+\frac{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}=\frac{\sin^2\left(\frac{B-C}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}$$

$$\frac{2}{2\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}=\frac{2}{\sin(B-C)}=2\operatorname{cosec}(B-C)$$

11. $\sin\theta=\frac{a}{b+c}$ అయితే $\cos\theta=\frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ అని చూపుము

Solution : -

$$\sin\theta=\frac{a}{b+c}\Rightarrow\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$$

$$\therefore\cos^2\theta=1-\frac{a^2}{(b+c)^2}\Rightarrow\cos^2\theta=\frac{(b+c)^2-a^2}{(b+c)^2}$$

$$\cos^2\theta=\frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{(b+c)^2}=\frac{\left(b^2+c^2-a^2\right)+2bc}{(b+c)^2}$$

$$=\frac{2bc\cos A+2bc}{(b+c)^2}=\frac{2bc\{1+\cos A\}}{(b+c)^2}$$

www.sakshieducation.com

$$\cos^2\theta = \frac{2bc \times 2\cos^2\frac{A}{2}}{(b+c)^2}$$

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

12. $a=(b+c)\cos\theta$ అయితే $\sin\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b+c}\cos\frac{A}{2}$ అని చూపుము

Solution : -

$$a=(b+c)\cos\theta \Rightarrow \frac{a}{b+c} = \cos\theta$$

$$\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta = 1-\frac{a^2}{(b+c)^2} \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{(b+c)^2} \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{(b^2+c^2-a^2)+2bc}{(b+c)^2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{2bc\cos A + 2bc}{(b+c)^2} \Rightarrow \sin^2\theta = \frac{2bc\{1+\cos A\}}{(b+c)^2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{2bc\left(2\cos^2\frac{A}{2}\right)}{(b+c)^2} \Rightarrow \sin\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b-c}\cos\frac{A}{2}$$

13. If $a=(b-c)\sec\theta$ అయితే $\tan\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b-c}\sin\frac{A}{2}$ అని చూపుము

Solution : -

$$\sec\theta = \frac{a}{b-c} \Rightarrow \tan^2\theta = \sec^2\theta - 1 = \frac{a^2}{(b-c)^2} = 1$$

$$\tan^2\theta = \frac{a^2-(b-c)^2}{(b-c)^2} \Rightarrow \tan^2\theta = \frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{(b-c)^2}$$

$$\tan^2\theta = \frac{2bc-\{b^2+c^2-a^2\}}{(b-c)^2}$$

www.sakshieducation.com

$$\tan^2\theta = \frac{2bc - 2bc\cos A}{(b-c)^2} = \frac{2bc[1-\cos A]}{(b-c)^2}$$

$$\tan^2\theta = \frac{2bc\left(2\sin^2\frac{A}{2}\right)}{(b-c)^2} \Rightarrow \tan\theta = \frac{2\sqrt{bc}}{b-c}\sin\frac{A}{2}$$

14. $a\cos\theta = b\cos(C+\theta) + c\cos(B-\theta)$ అయితే

Soluton : -

$$RHS = b\cos(c+\theta) + c\cos(B-\theta) = b\{\cos c\cos\theta - \sin c\sin\theta\}$$

$$+ c\{\cos B\cos\theta + \sin B\sin\theta\}$$

$$= b\cos c\cos\theta \; - b\sin\sin\theta + c\cos B\cos\theta + c\sin B\sin\theta$$

$$= \cos\theta\{b\cos c + c\cos B\} - \frac{bc}{2R}/\sin\theta + \frac{cb}{2R}\sin\theta = a\cos\theta$$

15. త్రిభుజంABC లోని కోణాలు A.P లో ఉ ండి మరియు

$b:c = \sqrt{3}:\sqrt{2}$ అయితే $A = 75^0$ అని చూపుము

Solution : -

త్రిభుజంABC లోని కోణాలు AP లో ఉన్నాయి.

$\therefore 2B = A + C \Rightarrow 3B = A + B + C$ but $A + B + C = 180^0$

$\therefore 3B = 180^0 \Rightarrow B = 60^0$

$b:c = \sqrt{3}:\sqrt{2}$

$2R\sin B = 2R\sin C = \sqrt{3}:\sqrt{2} \Rightarrow \sin B = \sin C = \sqrt{3} \; = \sqrt{2}$

$\sin 60^0 = \sin C = \sqrt{3}:\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{3}}{2}:\sin C = \sqrt{3}:\sqrt{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{2} = \sqrt{3}\sin C$

$\Rightarrow \sin c = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow C = 45^0$

$A + B + C = 180^0 \Rightarrow A + 60^0 + 45^0 = 180^0 \Rightarrow A = 75^0$c (proved)

www.sakshieducation.com

16. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}=\frac{\sin C}{\sin(A-B)}$ ఐతే త్రిభుజంABC సమద్విబాహు లేదా లంబ కోణ త్రిభుజం అని చూపుము

Solution : -

Given $\frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)}=\frac{\sin C}{\sin(A-B)}$

$\Rightarrow (a^2+b^2)\sin(A-B)=(a^2-b^2)\sin C$

Using sine rule we have

$4R^2\{\sin^2 A+\sin^2 B\}\sin(A-B)=4R^2\{\sin^2 A-\sin^2 B\}\sin C$

$\{\sin^2 A+\sin^2 B\}\sin(A-B)-\sin(A-B)\sin(A+B)\sin C=0$

But in triangle ABC $\sin(A+B)=\sin C$

$\therefore (\sin^2 A+\sin^2 B)\sin(A-B)-\sin(A-B)(\sin C)(\sin C)=0$

$\sin(A-B)\{\sin^2 A+\sin^2 B-\sin^2 C\}=0$

$\sin(A-B)=0 \; or \; \sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$

$A=B \; or \; a^2+b^2=c^2$

$\therefore$ triangle either isosceles or right angled

17. $\cos A+\cos B+\cos C=\frac{3}{2}$ ఐతే త్రిభుజంABC సమబాహు త్రిభుజం అని చూపుము

Solution: -

$\cos A+\cos B+\cos C=\frac{3}{2} \Rightarrow 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos C=\frac{3}{2}$

$2\cos\left(90^0-\frac{C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+\cos C=\frac{3}{2}$

$2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)+1-2\sin^2\frac{C}{2}=3/2$

$2\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-2\sin^2\frac{C}{2}=\frac{1}{2}$

www.sakshieducation.com

$$4\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)-4\sin^2\frac{C}{2}=1\Rightarrow 1+4\sin^2\frac{C}{2}-4\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=0$$

$$\left(2\sin\frac{C}{2}\right)^2-2\left(2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)-\cos^2\left(\frac{A-B}{2}\right)+1=0$$

$$\left\{2\sin\frac{C}{2}-\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)\right\}^2+\sin^2\left(\frac{A-B}{2}\right)=0$$

$$\therefore 2\sin\frac{C}{2}-\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)=0 \ and\ \sin\frac{A-B}{2}=0$$

$$\therefore 2\sin\frac{C}{2}=\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) and\ A-B=0$$

$$\therefore 2\sin\frac{C}{2}=1\Rightarrow\frac{C}{2}=30^0\Rightarrow c=60^0$$

$$A=B\therefore A=B=60^0$$

Hence trangile is equilateral

18. $\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1$ ఐతే త్రిభుజంABC లంబ కోణ త్రిభుజం అని చూపుము

$$\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C=1\Rightarrow\cos^2A+\cos^2B-1+\cos^2C=0$$

$$\cos^2A-\sin^2B+\cos^2C=0\Rightarrow\cos(A-B)\cos(A-B)+\cos^2C=0$$

$$\cos(180^0-c).\cos(A-B)+\cos^2C=0$$

$$-\cos C\cos(A-B)+\cos C=0$$

$$-\cos C\{\cos(A-B)-\cos C\}=0$$

$$-\cos C\{\cos(A-B)-\cos C\}=0$$

$$-\cos c\{\cos(A-B)-\cos(180^0-\overline{A+B})\}=0$$

$$-\cos c\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}=0$$

$$-\cos c\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\}=0$$

$$2\cos A\cos B\cos C=0$$

$$\Rightarrow\cos A=0\ or\ \cos B=0\ (or)\ \cos C=0$$

$$A=90^0\ (or)\ B=90^0\ or\ C=90^0$$

$\therefore$ Triangle is right angled triangle

www.sakshieducation.com

19. $a^2+b^2+c^2=8R^2$ ఐతే త్రిభుజంABC లంబ కోణ త్రిభుజం అని చూపుము

Solutin : -

Given $a^2+b^2+c^2=8R^2 \Rightarrow 4R^2\left\{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C\right\}=8R^2$

$\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2 \Rightarrow 1-\cos^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=2$

$1-\left\{\cos^2 A-\sin^2 B\right\}+1-\cos^2 C=2$

$-\cos(A-B)\cos(A-B)-\cos^2 C=0$

$\cos C\cos(A-B)-\cos^2=0 \Rightarrow \cos C\left\{\cos(A-B)-\cos C\right\}=0$

$\cos C\left\{\cos(A-B)+\cos(A+B)\right\}=0 \Rightarrow 2\cos A\cos B\cos C=0$

$\cos A=0\ or\ \cos B=0\ (or)\ \cos C=0 \Rightarrow A=90^0\ (or)\ B=90^0\ (or)\ C=90^0$

20. $\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2}, \cot\frac{C}{2}$ లు AP ఉంటే a, b,c లు AP లో ఉంటాయని చూపుము

Solution ; -

$\cot\frac{A}{2}, \cot\frac{B}{2} \cot\frac{C}{2}$ are in AP

$2\cot\frac{B}{2}=\cot\frac{A}{2}+\cot\frac{C}{2} \Rightarrow \frac{2s(s-b)}{\Delta}=\frac{s(s-a)}{\Delta}+\frac{s(s-c)}{\Delta}$

$\Rightarrow 2(s-b)=(s-a)+(s-c) \Rightarrow a-b+c=2s-a-c$

$a+c-b=a+b+c-a-c \Rightarrow a+c=2b$

21. $\sin^2\frac{A}{2}, \sin^2\frac{B}{2}, \sin^2\frac{C}{2}$ లు HP ఉంటే a, b,c లు HP లో ఉంటాయని చూపుము

Solution : -

$\sin^2\frac{A}{2}, \sin^2\frac{B}{2}, \sin^2\frac{C}{2}$ are in HP

$\frac{(s-b)(s-c)}{bc}, \frac{(s-c)(s-a)}{ac}, \frac{(s-a)(s-b)}{ab}$ are in HP

$\frac{bc}{(s-b)(s-c)}, \frac{ac}{(s-a)(s-c)}, \frac{ab}{(s-a)(s-b)}$ are in HP

Multiplying with $\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc}$ we have

www.sakshieducation.com

$$\frac{bc\,(s-a)(s-b)(s-c)}{abc\,(s-b)\,(s-c)}, \frac{ac\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{abc\,(s-a)\,(s-c)}, \frac{ab\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{abc\,(s-a)\,(s-b)}$$ and P

$\frac{s-a}{a}, \frac{s-b}{b}, \frac{s-c}{c}$ are in AP

Adding '1' to every term we here

$\frac{s-a}{a}+1, \frac{s-b}{b}+1, \frac{s-c}{c}+1$ are in AP

$\frac{s}{a}, \frac{s}{b}, \frac{s}{c}$ are in AP $\Rightarrow \frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ are in AP

a, b, c are in HP

22. $a^2 \cot A + b^2 \cot B + c^2 \cot C = \frac{abc}{R}$ అని చూపుము

Solution: -

$$a^2 \cot A + b^2 \cot B + c^2 \cot C$$

$$4R^2 \sin^2 A \times \frac{\cos A}{\sin A} + 4R^2 \sin^2 B \frac{\cos B}{\sin B} + 4R^2 \sin^2 C \frac{\cos C}{\sin C}$$

$$2R^2 \{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C\}$$

$$2R^2 \{2\sin(A+B)\cos(A-B) + \sin 2C\}$$

$$2R^2 \{2\sin C \cos(A-B) + 2\sin C \cos C\}$$

$$2R^2 \left[2\sin C\{\cos(A-B) + \cos C\}\right] = 4R\sin C\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$$

$$4R^2 \sin C \sin A \sin B = \frac{2\{2R^2 \sin A \sin B \sin C\}}{R} =$$

$$\frac{(2R\sin A)(2R\sin B)(2R\sin C)}{R} = \frac{abc}{R}$$

www.sakshieducation.com

23. $a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}=s+\frac{\Delta}{R}$ అని చూపుము

Solution: - $a\cos^2\frac{A}{2}+b\cos^2\frac{B}{2}+c\cos^2\frac{C}{2}$

$$\frac{a(1+\cos A)}{2}+\frac{b(1+\cos B)}{2}+\frac{c(1+\cos C)}{2}$$

$$\frac{a+a\cos A+b+b\cos B+C+c\cos C}{2}=\frac{(a+b+c)+}{2}$$

$$\frac{(a+b+c)+\{a\cos A+b\cos B+c\cos C\}}{2}$$

$$\frac{2s+2R\sin A\cos A+2R\sin B\cos B+2R\sin C\cos C}{2}$$

$$\frac{2S+R(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)}{2}$$

$$\frac{2S+R\{2\sin(A+B)\cos(A-B)+\sin 2C\}}{2}$$

$$\frac{2S+R\{2\sin C\cos(A-B)+2\sin C\cos C\}}{2}$$

$$\frac{2S+2R\sin C\{\cos(A-B)+\cos C\}}{2}$$

$$\frac{2S+2R\sin C\{\cos(A-B)-\cos(A+B)\}}{2}$$

$$\frac{2S+4R\sin A\sin B\sin C}{2}=S+2\mathrm{R}\sin A\sin B\sin C$$

$$\frac{S+2R^2\sin A\sin B\sin C}{R}=S+\frac{\Delta}{R}$$

www.sakshieducation.com

24. $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}=1-\frac{r}{2R}$ అని చూపుము

.

Sol. L.H.S. = $\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}$

$$=\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1-\cos B}{2}+\frac{1-\cos C}{2}$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos A+\cos B+\cos C)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right]$$

($\because$ from transformations)

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[1+\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R}\right]$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\left[1+\frac{r}{R}\right]$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}-\frac{r}{2R}=1-\frac{r}{2R}=\text{R.H.S.}$$

25. i. $\Delta=r_1r_2\sqrt{\frac{4R-r_1-r_2}{r_1+r_2}}$. ii. $a=(r_2+r_3)\sqrt{\frac{rr_1}{r_2r_3}}$ అని చూపుము

Sol. i)R.H.S. $r_1r_2\sqrt{\frac{4R-r_1-r_2}{r_1+r_2}}$

$$=r_1r_2\sqrt{\frac{4R-(r_1+r_2)}{r_1+r_2}}$$

$$\left(\because r_1+r_2=4R\cos^2\frac{C}{2}\right)$$

$$=r_1r_2\sqrt{\frac{4R\left(1-\cos^2\frac{C}{2}\right)}{4R\cos^2\frac{C}{2}}}$$

www.sakshieducation.com

$$= r_1 r_2 \sqrt{\frac{\sin^2 \frac{C}{2}}{\cos^2 \frac{C}{2}}} = r_1 r_2 \tan \frac{C}{2}$$

$$= \frac{\Delta}{S-a} \cdot \frac{\Delta}{S-b} \tan \frac{C}{2}$$

$$= \frac{\Delta^2}{(S-a)(S-b)} \sqrt{\frac{(S-b)(S-a)}{S(S-c)}}$$

$$= \frac{\Delta^2}{\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}} = \frac{\Delta^2}{\Delta} = \Delta = \text{R.H.S.}$$

ii) RHS $= (r_2 + r_3)\sqrt{\frac{rr_1}{r_2 r_3}} = \left(\frac{\Delta}{s-b} + \frac{\Delta}{s-c}\right)\sqrt{\frac{\frac{\Delta^2}{s(s-a)}}{\frac{\Delta^2}{(s-b)(s-c)}}}$

$$= \frac{\Delta\{s-c+s-b\}}{(s-b)(s-c)} \sqrt{\frac{\Delta^2}{s(s-a)} \cdot \frac{(s-b)(s-c)}{\Delta^2}}$$

$$= \frac{\Delta.(2s-b-c)}{\left\{\sqrt{(s-b)(s-c)}\right\}^2} \frac{\sqrt{\cancel{(s-b)(s-c)}}}{\sqrt{s(s-a)}} = \frac{\Delta/\{\cancel{a}+\cancel{b}+\cancel{c}-\cancel{b}-\cancel{c}\}}{\cancel{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}} = a$$

26. $r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r^2 = 16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ అని చూపుము

Sol.

$(r_1 + r_2 + r_3 - r)^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r^2 - 2r(r_1 + r_2 + r_3) + 2(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)$ ...(1)

But $[r_1 + r_2 + r_3 - r] = 4R$ and $r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1 = S^2$

$16R^2 = [r_1 + r_2 + r_3 - r]^2$

$16R^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r^2 - 2r(r_1 + r_2 + r_3) + 2(r_1 r_2 + r_2 r_3 + r_3 r_1)$

$= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r^2 - 2r(r_1 + r_2 + r_3) + 2S^2$

$16R^2 = r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r^2 - 2(rr_1 + rr_2 + rr_3) + 2S^2$ Consider $2(rr_1 + rr_2 + rr_3) =$

$$= 2\left[\frac{\Delta^2}{S(S-a)} + \frac{\Delta^2}{S(S-b)} + \frac{\Delta^2}{S(S-c)}\right]$$

www.sakshieducation.com

$$= 2\Delta^2 \frac{[(S-b)(S-c)+(S-a)(S-c)+(S-a)(S-b)]}{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$= \frac{2\Delta^2}{\Delta^2}\left[S^2 - Sc - Sb + bc + S^2 - Sc - Sa + ac + S^2 - Sb - Sa + ab\right]$$

$$= 2\left[3S^2 - 2S(a+b+c) + ab + bc + ca\right]$$

$$= 2\left[3S^2 - 4S^2 + ab + bc + ca\right]$$

$$= 2\left[ab + bc + ca - S^2\right]$$

$$= 2\left[ab + bc + ca\right] - 2S^2$$

From (2)

$$\Rightarrow r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + r^2$$

$$= 16R^2 + 2r(r_1 + r_2 + r_3) - 2S^2$$

$$= 16R^2 - 2S^2 + 2(ab + bc + ca) - 2S^2$$

$$= 16R^2 - 4S^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$= 16R^2 - 4\left(\frac{a+b+c}{2}\right)^2 + 2(ab + bc + ca)$$

$$= 16R^2 - \left[(a+b+c)^2 - 2(ab + bc + ca)\right]$$

$$= 16R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$$

27. P_1, P_2, P_3 లు శీర్షాల నుండి భుజాలకు గీసిన ఉన్నతులు అయితే

(i) $\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} = \frac{1}{r}$ (ii) $\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} - \frac{1}{P_3} = \frac{1}{r_3}$

(iii) $P_1 P_2 P_3 = \frac{(abc)^2}{8R^3} = \frac{8\Delta^3}{abc}$ అని చూపుము

Sol.

$$\Delta = \frac{1}{2} aP_1, \Delta = \frac{1}{2} bP_2, \Delta = \frac{1}{2} cP_3$$

$$\Rightarrow P_1 = \frac{2\Delta}{a}, P_2 = \frac{2\Delta}{b} \text{ and } P_3 = \frac{2\Delta}{c}$$

i) $\frac{1}{P_1} + \frac{1}{P_2} + \frac{1}{P_3} = \frac{a}{2\Delta} + \frac{b}{2\Delta} + \frac{c}{2\Delta}$

$$= \frac{a+b+c}{2\Delta} = \frac{2S}{2\Delta} = \frac{1}{r}$$

www.sakshieducation.com

ii) $\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}-\frac{1}{P_3}=\frac{a}{2\Delta}+\frac{b}{2\Delta}-\frac{c}{2\Delta}$

$$=\frac{a+b-c}{2\Delta}=\frac{2S-2c}{2\Delta}=\frac{S-c}{\Delta}=\frac{1}{r_3}$$

iii) $P_1P_2P_3=\frac{2\Delta}{a}\cdot\frac{2\Delta}{b}\cdot\frac{2\Delta}{c}=\frac{8\Delta^3}{abc}$

28. a = 13 b = 14 c = 15 ఐతే $R=\frac{65}{8}$ $r=4$ $r_1=\frac{21}{2}$ $r_2=12$ *and* $r_3=14$ అని చూపుము

Sol. a = 13, b = 14, c = 15

$$S=\frac{a+b+c}{2}=\frac{13+14+15}{2}=\frac{42}{2}=21$$

$$S-a=21-13=8, S-b=21-14=7$$

$$S-c=21-15=6$$

$$\Delta=\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}$$

$$=\sqrt{21(8)(7)(6)}=\sqrt{21\times16\times21}$$

$$=\sqrt{21\times21\times4\times4}=21\times4=84$$

$$R=\frac{abc}{4\Delta}=\frac{13\times14\times15}{4\times84}=\frac{65}{8}$$

$$r=\frac{\Delta}{S}=\frac{84}{21}=4$$

$$r_1=\frac{\Delta}{S-a}=\frac{84}{8}=\frac{21}{2}$$

$$r_2=\frac{\Delta}{S-b}=\frac{84}{7}=12$$

$$r_3=\frac{\Delta}{S-c}=\frac{84}{6}=14$$

www.sakshieducation.com

29. $r_1 = 2\ r_2 = 3\ r_3 = 6$ ఐతే $r = 1\ \ a = 3\ \ b = 4\ c = 5$ అని చూపుము

Sol. $\Delta^2 = rr_1r_2r_3 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 6 = 36$

$\Delta^2 = 36 \Rightarrow \Delta = 6$

$r = \frac{\Delta}{S} = \frac{6}{S} \Rightarrow S = 6 \qquad (\because r = 1)$

$r_1 = \frac{\Delta}{S-a} \Rightarrow S - a = \frac{\Delta}{r_1}$

$\therefore a = S - \frac{\Delta}{r_1} = 6 - \frac{6}{2} = 6 - 3 = 3$

$r_2 = \frac{\Delta}{S-b} \Rightarrow S - b = \frac{\Delta}{r_2}$

$\therefore b = S - \frac{\Delta}{r_2} = 6 - 3 = 3$

$r_3 = \frac{\Delta}{S-c} \Rightarrow S - c = \frac{\Delta}{r_3}$

$\therefore c = S - \frac{\Delta}{r_3} = 6 - 1 = 5$

30. $a^2 \cot A + b^2 \cot B + c^2 \cos C = \frac{abc}{R}$ అని చూపుము

.

Sol. L.H.S. $a^2 \cot A + b^2 \cot B + c^2 \cos C$

$= 4R^2 \sin^2 A \frac{\cos A}{\sin A} + 4R^2 \sin^2 B \frac{\cos B}{\sin B} \qquad + 4R^2 \sin^2 C \frac{\cos C}{\sin C}$ (by sine rule)

$= 2R^2 (2\sin A \cos A + 2\sin B \cos B + 2\sin C \cos C)$

$= 2R^2 (\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C)$

$= 2R^2 (4 \sin A \sin B \sin C)$

$= \frac{1}{R}(2R \sin A)(2R \sin B)(2R \sin C)$

$= \frac{abc}{R} =$ R.H.S.

www.sakshieducation.com

31. ΔABC లో $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$ ఐతే $C = 60°$ అని చూపుము

Sol. $\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}$

$\Rightarrow \frac{b+c+a+c}{(a+c)(b+c)}=\frac{3}{a+b+c}$

$\Rightarrow 3(a+c)(b+c)=(a+b+2c)(a+b+c)$

$\Rightarrow 3(ab+ac+bc+c^2)$

$=(a^2+b^2+2ab)+3c(a+b)+2c^2$

$\Rightarrow ab=a^2+b^2-c^2=2ab\cos C$

(from cosine rule)

$\Rightarrow \cos C=\frac{1}{2}\Rightarrow C=60°$

32. $\cot A+\cot B+\cot C=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}$ అని చూపుము

Sol. L.H.S. = $\Sigma\cot A=\Sigma\frac{\cos A}{\sin A}$

$=\Sigma\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc\sin A}\right)$(by cosine rule)

$=\Sigma\frac{b^2+c^2-a^2}{4\Delta}\left[\because \Delta=\frac{1}{2}bc\sin A\right]$

$=\frac{1}{4\Delta}[b^2+c^2-a^2+c^2+a^2$

$-b^2+a^2+b^2-c^2]$

$=\frac{a^2+b^2+c^2}{4\Delta}=$ R.H.S.

33. ΔABC లో a cos A = b cos B ఐతే ఆ త్రిభుజం సమద్విబాహు త్రిభుజం లేదా లంబకోణ త్రిభుజం అని చూపుము

Sol. a cos A = b cos B

$\Rightarrow$ 2R sin A cos A = 2R sin B cos B

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow$ sin 2A = sin 2B = sin(180° – 2B)

Hence 2A = 2B or 2A = 180° – 2B

$\Rightarrow$ A = B or A = (90° – B)

$\Rightarrow$ a = b or (A + B) = 90°

$\Rightarrow$ a = b or C = 90°

$\therefore$ The triangle is isosceles or right angled.

34. $\cot\frac{A}{2} : \cot\frac{B}{2} : \cot\frac{C}{2} = 3:5:7$ ఐతే $a:b:c = 6:5:4$ అని చూపుము

Sol. $\cot\frac{A}{2} : \cot\frac{B}{2} : \cot\frac{C}{2} = 3:5:7$

$$\Rightarrow \frac{s(s-a)}{\Delta} \cdot \frac{s(s-b)}{\Delta} \cdot \frac{s(s-c)}{\Delta} = 3:5:7$$

$$\Rightarrow (s-a):(s-b):(s-c) = 3:5:7$$

$$\Rightarrow \frac{s-a}{3} = \frac{s-b}{5} = \frac{s-c}{7} = k \text{ (say)}$$

Then s – a = 3k, s – b = 5k, s – c = 4k

Adding these equations,

3s – (a + b + c) = 3k + 5k + 7k = 15k

$\Rightarrow$ 3s – 2s = 15k $\Rightarrow$ s = 15k

Hence a = 12k, b = 10k, c = 8k

$\therefore$ a : b : c = 12k : 10k : 8k = 6 : 5 : 4

www.sakshieducation.com

35. $a^3 \cos(B - C) + b^3 \cos(C - A) + c^3 \cos(A - B) = 3abc$ అని చూపుము

Sol. L.H.S. $= \Sigma a^3 \cos(B - C)$

$$= \Sigma a^2 (2R \sin A)\cos(B - C)$$

$$= R\Sigma a^2 \cdot [2\sin(B + C)\cos(B - C)]$$

$$= R\Sigma a^2 (\sin 2B + \sin 2C)$$

$$= R\Sigma a^2 (2\sin B\cos B + 2\sin C\cos C)$$

$$= \Sigma[a^2 (2R\sin B)\cos B + a^2 (2R\sin C)\cos C]$$

$$= \Sigma(a^2 b\cos B + a^2 c\cos C)$$

$$= (a^2 b\cos B + a^2 c\cos C) + (b^2 c\cos C + b^2 a\cos A) + (c^2 a\cos A + c^2 b\cos B)$$

$$= ab(a\cos B + b\cos A) + bc(b\cos C + c\cos B) + ca(c\cos A + a\cos C)$$

$$= ab(c) + bc(a) + ca(b)$$

$$= 3abc = \text{R.H.S.}$$

36. P_1, P_2, P_3 లు శీర్షాల నుండి భుజాలకు గీసిన ఉన్నతులు అయితే

$$\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{P_2^2} + \frac{1}{P_3^2} = \frac{\cot A + \cot B + \cot C}{\Delta^2}$$ అని చూపుము

Sol. P_1, P_2, P_3 లు శీర్షాల నుండి భుజాలకు గీసిన ఉన్నతులు కావున

$$\Delta = \frac{1}{2}ap_1 = \frac{1}{2}bp_2 = \frac{1}{2}cp_3$$

$$\Rightarrow p_1 = \frac{2\Delta}{a}, p_2 = \frac{2\Delta}{b}, p_3 = \frac{2\Delta}{c}$$

Now $\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{p_3^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta^2}$

$$= \frac{1}{\Delta}(\cot A + \cot B + \cot C) = \text{R.H.S.}$$

$[\because \cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4\Delta}]$

www.sakshieducation.com

37. త్రిభుజంABC లో $(r_2-r_1)(r_3-r_1) = 2r_2r_3$ ఐతShow that A = 90° అని చూపుము

.

Sol. $(r_2 - r_1)(r_3 - r_1) = 2r_2r_3$

$$\Rightarrow \left[\frac{\Delta}{(s-b)} - \frac{\Delta}{(s-a)}\right]\left[\frac{\Delta}{(s-c)} - \frac{\Delta}{(s-a)}\right]$$

$$= 2\frac{\Delta}{(s-b)}\frac{\Delta}{(s-c)}$$

$$\Rightarrow \Delta\left[\frac{s-a-s+b}{(s-b)(s-a)}\right]\cdot\Delta\left[\frac{s-a-s+c}{(s-c)(s-a)}\right]$$

$$= \frac{2\Delta^2}{(s-b)(s-c)}$$

$$\Rightarrow (b-a)(c-a) = 2(s-a)^2$$

$$\Rightarrow (b-a)(c-a) = 2\left(\frac{b+c-a}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow 2(bc-ca-ab+a^2)$$

$$= b^2+c^2+a^2+2bc-2ca-2ab$$

$$\Rightarrow 2a^2 = b^2+c^2+a^2$$

$$\Rightarrow b^2+c^2 = a^2$$

Hence ΔABC is right angled and A = 90°.

38. త్రిభుజంABC లో $\sum (r+r_1)\tan\left(\frac{B-C}{2}\right) = 0$ అని చూపుము

Solution: -

$$r_1r_2 = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + 4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$= 4R\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

$$\sum (r_1+r)\tan\left(\frac{B-C}{2}\right) = \sum 4R\sin\frac{A}{2}\,\cancel{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}\,\frac{\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)}{\cancel{\cos\left(\frac{B-C}{2}\right)}}$$

$$\sum 3R\,2\sin\left(90^0 - \frac{B+C}{2}\right).\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)$$

www.sakshieducation.com

$$\sum 2R\left\{2\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)\sin\left(\frac{B-C}{2}\right)\right\}$$

$$\sum 2R\{\sin B-\sin C\} = \sum 2R\sin B-2R\sin C$$

$$\sum b-c = b-c+c-a+a-b=0$$

39. $\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}=\frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2}$ అని చూపుము

Sol. L.H.S. $=\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}$

$$=\frac{s^2}{\Delta^2}+\frac{(s-a)^2}{\Delta^2}+\frac{(s-b)^2}{\Delta^2}+\frac{(s-c)^2}{\Delta^2}$$

$$=\frac{1}{\Delta^2}\left[s^2+(s-a)^2+(s-b)^2+(s-c)^2\right]$$

$$=\frac{1}{\Delta^2}\left[s^2+s^2-2as+a^2+s^2-2bs+b^2+s^2-2cs+c^2\right]$$

$$=\frac{1}{\Delta^2}\left[4s^2-2s(a+b+c)+a^2+b^2+c^2\right]$$

$$=\frac{1}{\Delta^2}\left[4s^2-2s(2s)\right]+\frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2}$$

$$=\frac{a^2+b^2+c^2}{\Delta^2}=\text{R.H.S.}$$

40. $\frac{r_1}{bc}+\frac{r_2}{ca}+\frac{r_3}{ab}=\frac{1}{r}-\frac{1}{2R}$ అని చూపుము

Sol. L.H.S. $=\frac{r_1}{bc}+\frac{r_2}{ca}+\frac{r_3}{ab}=\frac{1}{abc}[ar_1+br_2+cr_3]$

$$=\frac{1}{abc}\left[\Sigma a\cdot s\tan\frac{A}{2}\right]=\frac{s}{abc}\Sigma 2R\sin A\tan\frac{A}{2} \qquad \left(\because \Delta=\frac{abc}{4R}\right)$$

$$=\frac{s}{abc}\Sigma\left[2R\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}\right)\right](\because r=\Delta/s)$$

$$=4\frac{Rs}{abc}\Sigma\left(\sin^2\frac{A}{2}\right)=\frac{s}{\Delta}\Sigma\left(\frac{1-\cos A}{2}\right)$$

www.sakshieducation.com

$$=\frac{1}{2r}(1-\cos A+1-\cos B+1-\cos C)$$

$$=\frac{1}{2r}[3-(\cos A+\cos B+\cos C)]$$

$$=\frac{1}{2r}\left[3-\left(1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2r}\left[2-\left(\frac{4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{R}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2r}\left[2-\frac{r}{R}\right]=\frac{1}{r}-\frac{1}{2R}=\text{R.H.S.}$$

41. $r:R:r_1=2:5:12$ ఐతే $A=90^0$ అని చూపుము

Sol. If r : R : r_1 = 2 : 5 : 12, then r = 2k, R = 5k and r_1 = 12k

$$r_1-r=12k-2k=10k=2(5k)=2R$$

$$\Rightarrow 4R\sin\frac{A}{2}\left[\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\right]=2R$$

$$\Rightarrow 2\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)=1\Rightarrow\sin^2\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\left[\because\cos\left(\frac{B+C}{2}\right)=\sin\frac{A}{2}\right]$$

$$\Rightarrow\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\sin 45°$$

$$\Rightarrow\frac{A}{2}=45°\Rightarrow A=90°$$

త్రిభుజం ఒక లంబ కోణ త్రిభుజం.

42. r + r_3 + r_1 − r_2 = 4R cos B అని చూపుము

Sol. r + r_3

$$=4R\sin\frac{C}{2}\left[\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}+\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\right]$$

$$=4R\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$r_1 - r_2$

www.sakshieducation.com

$$= 4R\cos\frac{C}{2}\left[\sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right]$$

$$= 4R\cos\frac{C}{2}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$$

$\therefore$ $r + r_3 + r_1 - r_2$

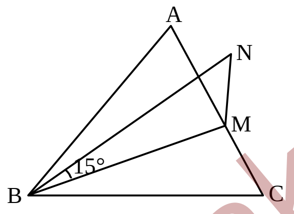
$$= 4R\left[\sin\frac{C}{2}\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\frac{C}{2}\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)\right]$$

$$= 4R\sin\left(\frac{C}{2}+\frac{A}{2}-\frac{B}{2}\right) = 4R\sin\left(90° - \frac{B}{2} - \frac{B}{2}\right)$$

$$= 4R\cos B$$

42. ఒక త్రిభుజాకార స్థలం ABC లో మధ్యబిందువు M వద్ద ఒక దీపస్తంభం ఉంది. BC = 7 m, CA = 8 m , AB = 9 m ఇంకా B వద్ద దీప స్తంభం చేసే కోణం 15° ఐతే దీపస్తంభం ఎత్తు ఎంత?

Sol.



MN = దీపస్తంభం ఎత్తు

MN = h (?)

$\angle NBM = 15°$

ΔABC లో $\cos C = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}$

$$= \frac{64+49-81}{2\times8\times7} = \frac{16\times2}{16\times7} = \frac{32}{112} = \frac{2}{7}$$

$$\therefore \cos C = \frac{2}{7}$$

BM = x

ΔBCM లో, $\cos C = \frac{7^2 + 4^2 - x^2}{2\times7\times4}$

www.sakshieducation.com

$$\frac{2}{7} = \frac{49 + 16 - x^2}{7 \times 8}$$

$$16 = 65 - x^2$$

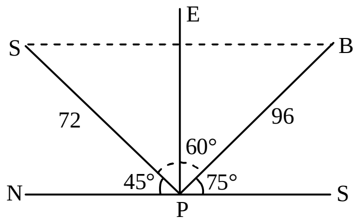
$$x^2 = 65 - 16 \Rightarrow x = 7$$

ΔBMN లో $\tan 15° = \frac{h}{x}$

$$h = x \tan 15° = 7(2 - \sqrt{3})$$

43. ఒక రేవు వద్ద రెండు ఓడలుఒకే సమయంలో బయలుదేరాయి. ఒకటి గంటకు 24 km వేగం తో N 45°E దిశ లో మరొకటి 32 km వేగంతో S 75° E దిశ లో ప్రయణిస్తే 3 గంటల తర్వాత ఓడల మధ్య దూరం ఎంత?

Sol.



P is the position of the port.

A is the position of the North-East traveled ship after 3 hours is = 72 km

Position of the South-East traveled ship after 3 hours is 3 × 32 = 96 km

From the data $\angle APB = 60°$

In ΔAPB,

$$\cos P = \frac{AP^2 + BP^2 - AB^2}{2 AP\, BP}$$

$$\cos 60° = \frac{(72)^2 + (96)^2 - AB^2}{2 \times 72 \times 96}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{72^2 + 96^2 - AB^2}{2 \times 72 \times 96}$$

$$1 = \frac{5184 + 9216 - AB^2}{72 \times 96}$$

$$1 = \frac{14400 - AB^2}{6912}$$

www.sakshieducation.com

$$6912 = 14400 - AB^2$$

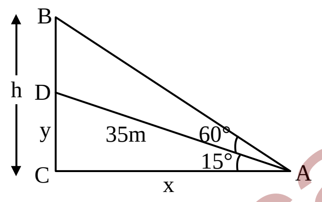
$$AB^2 = 14400 - 6912$$

$$AB^2 = 7488$$

$$AB = \sqrt{7488} = 86.53 = 86.4\,km$$

31. A tree stands vertically on the slant of the hill. From a point A on the ground 35 meters down the hill from the base of the tree, the angle of elevation of the top of the tree is 60°. If the angle of elevation of the foot of the tree from A is 15°, then find the height of the tree.

Sol.



BD is the height of the tree and A is the point of observation.

Let CD = y

AC = x

Given that, ∠CAD = 15°, ∠CAB = 60° and AD = 35 m.

In $\Delta CAD,\ \sin 15° = \frac{y}{35}$

$$y = 35\sin 15° = \frac{35(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}} \qquad \ldots(1)$$

$$\cos 15° = \frac{x}{35}$$

$$x = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \times 35 \qquad \ldots(2)$$

In $\Delta CAB,\ \tan 60° = \frac{h}{x}$

$$h = x\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} \times 35 \times \sqrt{3}$$

Height of the tree = h – y

www.sakshieducation.com

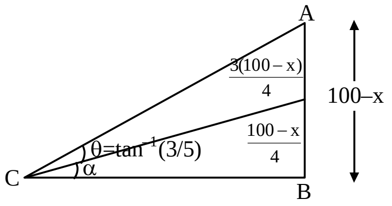
$$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\times 35\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\times 35=$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\left[3+\sqrt{3}-\sqrt{3}+1\right]$$

$$=\frac{35\times 4}{2\sqrt{2}}=35\sqrt{2}\text{ m}$$

32. The upper 3/4th portion of a vertical pole subtends an angle $Tan^{-1}3/5$ at a point in the horizontal plane through its foot and at a distance 40 m from the foot. Given that the vertical pole is at a height less than 100 m from the ground, find its height.

Sol.



AB is the height of the tree.

AD is the 3/4th part of upper part of the tree.

DB is the 1/4th lower part of the tree.

Let AB = 100 – x

C is the point of observation.

In ΔBCD,

Let $\angle DCA:\ \theta=\tan^{-1}\frac{3}{5}\Rightarrow \tan\theta=\frac{3}{5}$

$$\tan\alpha=\frac{100-x}{4}\times\frac{1}{40}=\frac{100-x}{160}$$

$$\tan(\theta+\alpha)=\frac{\tan\theta+\tan\alpha}{1-\tan\theta\tan\alpha}$$

$$\frac{100-x}{40}=\frac{\frac{3}{5}+\frac{100-x}{160}}{1-\frac{3}{5}\times\frac{100-x}{160}}$$

www.sakshieducation.com

$$\frac{100-x}{40}=\frac{480+5(100-x)}{800-3(100-x)}$$

$$\frac{100-x}{40}=\frac{480+500-5x}{800-300+3x}$$

$$\frac{100-x}{40}=\frac{980-5x}{500+3x}$$

$$[100-x][500+3x]=40[980-5x]$$

$$50000+300x-500x-3x^2=39200-200x$$

$$\Rightarrow 3x^2+500x-400x=50000-39200$$

$$3x^2=10800$$

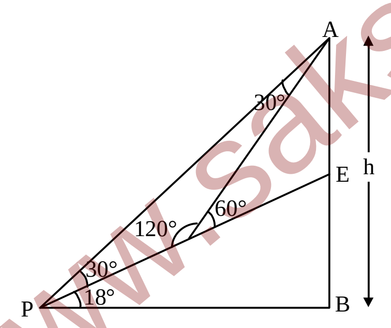
$$x^2=\frac{10800}{3}=3600$$

$$x=\sqrt{3600}=60$$

Height of the tree = 100 – x = 40 m.

33. Let an object be placed at some height h cm and let P and Q be two points of observation which are at a distance 10 cm apart on a line inclined at angle 15° to the horizontal. If the angles of elevation of the object from P and Q are 30° and 60° respectively then find h.

Sol.



A is the position of the object.

Given that AB = h cm

P and Q are points of observation.

Given that, PQ = 10 cm

We have,

∠BPE = 15°, ∠EPA = 30°, ∠EQA = 60°

In ΔPQA,

P = 30°, Q = 120° and A = 30°

www.sakshieducation.com

$\therefore$ By sine rule,

$$\frac{AP}{\sin 120°} = \frac{PQ}{\sin 30°}$$

$$\frac{AP}{\sin(180° - 60°)} = \frac{10}{1/2}$$

$$\frac{AP}{\sin 60°} = 20° \Rightarrow \frac{AP}{\sqrt{3}/2} = 20°$$

$$AP = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

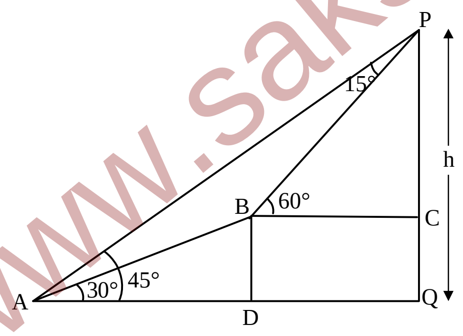
In ΔPBA, $\sin 45° = \frac{AB}{AP}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{h}{10\sqrt{3}}$$

$$h = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot 2 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 5\sqrt{2}\sqrt{3} = 5\sqrt{6}\text{ cm}$$

34. The angle of elevation of the top point P of the vertical tower PQ of height h from a point A is 45° and from a point B is 60°, where B is a point at a distance 30 meters from the point A measured along the line AB which makes an angle 30° with AQ. Find the height of the tower.

Sol.



In the figure

PQ = h, $\angle PAQ = 45°$

$\angle BAQ = 30°$ and $\angle PBC = 60°$

Also, AB = 30 m

$\therefore$ $\angle BAP = \angle APB = 15°$

This gives, BP = AB = 30 and

www.sakshieducation.com

h = PC + CD = BP sin 60° + AB sin 30°

$=15\sqrt{3}+15=15(\sqrt{3}+1)$ meters.

Theorem : - - త్రిభుజం ABC లో

(i) $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$ (ii) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}}$

(iii) $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-C)}{S(S-a)}}=\frac{\Delta}{S(S-a)}=\frac{(S-b)(S-C)}{\Delta}$

(iv) $\cot A/2=\sqrt{\frac{S(S-a)}{(S-b)(S-c)}}=\frac{\Delta}{(S-b)(S-c)}=\frac{S(S-a)}{\Delta}$

Proof (i) కొసైన్ సూత్రం నుండి

$$a^2+b^2+c^2=2bc\cos A\Rightarrow 2bc\cos=b^2+c^2-a^2$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$2\sin^2\frac{A}{2}=1-\cos A$$

$$=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}$$

$$\therefore 2\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-\{b^2+c^2-2bc\}}{2bc}\Rightarrow\sin^2\frac{A}{2}=\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}$$

$$\sin^2\frac{A}{2}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}$$

$\because a+b+c=2S$ we have $2S-2C=a+b-c$

$$\therefore\sin^2\frac{A}{2}=\frac{\cancel{2}(S-C)\cancel{2}(S-b)}{\cancel{4}bc}\Rightarrow\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-C)}{bc}}$$

Proof (ii)

$$2\cos^2\frac{A}{2}=1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}\Rightarrow 2\cos^2\frac{A}{2}\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(b+c-a)(b+c+a)}{4bc}$$

www.sakshieducation.com

$a+b+c=2S;\ \ 2S-2a=b+c-a$

$\therefore \cos^2\frac{A}{2}=\frac{2(S-a)2S}{4bc} \Rightarrow \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}}$

Proof (iii) $\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\sqrt{\frac{\frac{(S-b)(S-c)}{b-c}}{\frac{S(S-a)}{b-c}}}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}}$

$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}\frac{(S-b)(S-c)}{(S-b)(S-c)}}=\frac{(S-b)(S-c)}{\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}=\frac{(S-b)(S-c)}{\Delta}$

$\tan\frac{A}{2}\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{S(S-a)}\times\frac{S(S-a)}{S(S-a)}}=\frac{\sqrt{S(S-a)(S-b)(S-c)}}{S(S-a)}=\frac{\Delta}{S(S-a)}$

Proof of (iv)

$\tan A/2$ యొక్క వ్యుత్క్రమ విలువను తీసుకుంటే $\cot A/2$ విలువ వస్తుంది.

$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-c)}{bc}}$ $\quad \sin B/2=\sqrt{\frac{(S-c)(S-a)}{ac}}$ $\quad \sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{ab}}$

$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{S(S-a)}{bc}}$ $\quad \cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{S(S-b)}{ac}}$ $\quad \cos\frac{C}{2}\sqrt{\frac{S(S-c)}{ab}}$

$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(S-b)(S-C)}{S(S-a)}}=\frac{\Delta}{S(S-a)}=\frac{(S-b)(S-c)}{\Delta}$

$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(S-c)(S-a)}{S(S-b)}}=\frac{\Delta}{S(S-b)}=\frac{(S-c)(S-a)}{\Delta}$

$\tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(S-a)(S-b)}{S(S-c)}}=\frac{\Delta}{S(S-c)}=\frac{(S-c)(S-a)}{\Delta}$

$\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{S(S-a)}{(S-b)(S-c)}}=\frac{\Delta}{(S-b)(S-c)}=\frac{S(S-a)}{\Delta}$

$\cot\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{S(S-b)}{(S-a)(S-c)}}=\frac{\Delta}{(S-a)(S-c)}=\frac{S(S-b)}{\Delta}$

$\cot\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{S(S-C)}{(S-a)(S-b)}}=\frac{\Delta}{(S-a)(S-b)}=\frac{S(S-C)}{\Delta}$

www.sakshieducation.com

విలోమ త్రికోణమితీయ ప్రమేయాలు

1. ఈ క్రింది వానిని గణించండి.

(i) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(ii) $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

(iii) $\sec^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)$

(iv) $\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)$

(v) $\sin\left\{\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

(vi) $\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$

(vii) $\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)$

(iv) $\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)$

(i) సాధన:

$$\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}\left\{\because \sin^{-1}(-x)=\sin^{-1}x\right\}$$

(ii)సాధన:

$$\cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4}$$

(iii)సాధన:

$$\sec^{-1}\left(-\sqrt{2}\right)=\pi-\sec^{-1}\sqrt{2}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

www.sakshieducation.com

(iv)సాధన:

$$\cot^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)=\pi-\cot^{-1}\sqrt{3}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

(v)సాధన:

$$\sin\left\{\frac{\pi}{3}-\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}=\sin\left\{\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}\frac{1}{2}\right\}=\sin\left\{\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right\}=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

(vi)సాధన:

$$\sin\left\{\frac{\pi}{2}-\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right\}=\sin\left\{\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}=\sin\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right\}=\sin 120^0=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(vii)సాధన:

$$\sin^{-1}\left(\sin\frac{5\pi}{6}\right)=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\left\{\because \sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}\right\}$$

$$=\frac{\pi}{6}\because \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$$

(iv)సాధన:

$$\cos^{-1}\left(\cos\frac{5\pi}{4}\right)=\cos^{-1}\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}=\pi-\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}}=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$$

2. ఈ క్రింది వానిని కనుగొనుము

(i) $\sin\left\{\cos^{-1}\frac{3}{2}\right\}$

(ii) $\tan\left\{\operatorname{cos}ec^{-1}\frac{65}{63}\right\}$

(iii) $\sin\left\{2\sin^{-1}\frac{4}{5}\right\}$

(iv) $\sin^{-1}\sin\left(\frac{33\pi}{7}\right)$

www.sakshieducation.com

(v) $\cos^{-1}\cos\left(\frac{17\pi}{6}\right)$

(i)సాధన:

$$\sin\left\{\cos^{-1}\frac{3}{5}\right\} \quad let\ \cos^{-1}\frac{3}{5}=\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{3}{5}$$

$$\sin\left\{\cos^{-1}\frac{3}{5}\right\} \quad = \quad \sin\alpha=\frac{4}{5} \quad \left\{\because \cos\alpha=\frac{3}{5}\right\}$$

(ii)సాధన:

$$\tan\left\{\cos ec^{-1}\frac{65}{63}\right\} \quad let\ \cos ec^{-1}\frac{65}{63}=\alpha \Rightarrow \cos ec\,\alpha=\frac{65}{63}$$

(iii)సాధన:

$$\sin\left\{2\sin^{-1}\frac{4}{5}\right\} \quad let\ \ \sin^{-1}\frac{4}{5}=\alpha \quad \Rightarrow\ \sin\alpha=\frac{4}{5}:\cos\alpha=\frac{3}{5}$$

$$\sin\left\{2\sin^{-1}\frac{4}{5}\right\} \;=\; \sin^{2}\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times\frac{4}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{24}{25}$$

(iv)సాధన:

$$\sin^{-1}\sin\left(\frac{33\pi}{7}\right)=\sin^{-1}\left\{\sin\left\{5\pi-\frac{2\pi}{7}\right\}\right\}=\sin^{-1}\left\{+\sin\left(\frac{2\pi}{7}\right)\right\}=\frac{2\pi}{7}$$

(v)సాధన:

$$\cos^{-1}\left\{\cos\frac{17\pi}{6}\right\}=\cos^{-1}\left\{\cos 3\pi-\frac{\pi}{6}\right\}=\cos^{-1}\left\{-\cos\frac{\pi}{6}\right\}=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$$

www.sakshieducation.com

3) క్రింది వాటిని సూక్ష్మీకరించండి.

i) $\tan^{-1}(\sec x + \tan x)$.

సాధన:

$$\tan^{-1}\left[\frac{1+\sin x}{\cos x}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{1+\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}+2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)^2}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)}\right)$$

ii) $\sin^{-1}\left(2\cos^2\theta - 1\right) + \cos^{-1}\left(1-2\sin^2\theta\right)$

సాధన: $\sin^{-1}(\cos 2\theta) + \cos^{-1}(\cos 2\theta)$

$= \sin^{-1}\left[\sin\left(90^0 - 20^0\right)\right] + \cos^{-1}(\cos 2\theta)$

$= 90^0 - 2\theta + 2\theta = 90^0$

iii) $\tan^{-1}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right), x \in R$

సాధన: $x = \tan\theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1} x$

$\tan^{-1}\left(\tan\theta + \sqrt{1+\tan^2\theta}\right)$

$\tan^{-1}(\tan\theta + \sec\theta)$

www.sakshieducation.com

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}+\frac{1}{\cos\theta}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{1+\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1+\tan\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}{1+\tan^2\frac{\theta}{2}}}\right]$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}+2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{\left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)^2}{\left(1+\tan\frac{\theta}{2}\right)\left(1-\tan\frac{\theta}{2}\right)}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{1+\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)\right)$$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}$$

$$= \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\tan^{-1}x = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\tan^{-1}x$$

5. $\sec^2(Tan^{-1}2)+\cos ec^2(\cot^{-1}2)=10$ **నిరూపించండి.**

సాధన: $Tan^{-1}2=\alpha$ *and* $\cot^{-1}2=\beta$ అనుకొనుము

$Tan\alpha = 2$ *and* $\cot\beta = 2$

LHS = $\sec^2\alpha+\cos ec^2\beta = 1+Tan^2\alpha+1+\cot^2\beta = 44+1+4=10$

www.sakshieducation.com

స్వల్ప సమాధాన ప్రశ్నలు..

ఈ క్రింది వానిని నిరూపించండి.

1(i) $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\cos^{-1}\frac{36}{85}$

(ii) $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{33}{65}$

iii) $\tan\left[\cot^{-1}9+\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{41}}{4}\right]=1$

సాధన:

(i) సాధన:

L.H.S $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}$

Let $\sin^{-1}\frac{3}{5}=\alpha$ $\quad\sin^{-1}\frac{8}{17}=\beta$

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$ $\quad\sin\beta=\frac{8}{17}$

$\cos\alpha=\frac{4}{5}$ $\quad\cos\beta=\frac{15}{17}$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{15}{17}-\frac{3}{5}\times\frac{8}{17}=\frac{36}{85}$$

$\therefore\ \alpha+\beta=\cos^{-1}\frac{36}{85}\Rightarrow\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\cos^{-1}\frac{36}{85}$

(ii) సాధన:

$\sin^{-1}\frac{3}{5}=\alpha$ $\quad\cos^{-1}\frac{12}{13}=\beta$ అనుకొనుము.

$\sin\alpha=\frac{3}{5}$ $\quad\cos\beta=\frac{12}{13}$

www.sakshieducation.com

$$\cos\alpha\frac{4}{5} \qquad \sin\beta=\frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

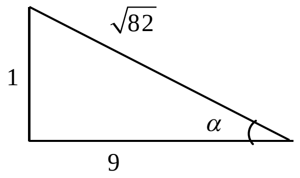
$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{33}{65}$$

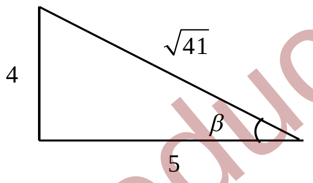
$$\therefore\alpha+\beta=\cos^{-1}\frac{33}{65}$$

$$\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}=\cos^{-1}\frac{33}{65}$$

iii) $\alpha=\cot^{-1}9,\beta=\operatorname{cos}ec^{-1}\frac{\sqrt{41}}{4}$

$\cot\alpha=9$, $\operatorname{cos}ec\beta=\frac{\sqrt{41}}{4}$





$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{9}+\frac{4}{5}}{1-\frac{1}{9}.\frac{4}{5}}$$

$$=\frac{\frac{5+36}{45}}{\frac{45-4}{45}}=\frac{41}{41}=1$$

$$\tan(\alpha+\beta)=1$$

$$\tan\left(\cos^{-1}9+\operatorname{cos}ec\frac{41}{4}\right)=1$$

www.sakshieducation.com

ఈ క్రింది వానిని కనుగొనుము.

2(i) $\sin\left\{\cos^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}\right\}$

(ii) $Tan\left\{\sin^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{34}}\right\}$

(iii) $\cos\left\{\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}\right\}$

(i)సాధన:

Let $\cos^{-1}\frac{3}{5}=\alpha \quad and \quad \cos^{-1}\frac{12}{13}=\beta$

$\cos\alpha=\frac{3}{5}\ and\ \cos\beta=\frac{12}{13}$

$$\sin\left\{\cos^{-1}\frac{3}{5}+\cos^{-1}\frac{12}{13}\right\}=\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}$$

$$=\frac{63}{65}$$

(ii)సాధన:

Let $\sin^{-1}\frac{3}{5}=\alpha\ and\ \cos^{-1}\frac{5}{\sqrt{34}}=\beta$

$\sin\alpha=\frac{3}{5} \quad \cos\beta=\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\cos\alpha=\frac{4}{5} \quad \sin\beta=\frac{3}{\sqrt{34}}$

www.sakshieducation.com

$$Tan(\alpha+\beta)=\frac{Tan\alpha+Tan\beta}{1-Tan\alpha Tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{9}{20}}=\frac{\frac{27}{20}}{\frac{20-9}{20}}=\frac{27}{11}$$

(iii)సాధన:

Let $\sin^{-1}\frac{3}{5}=\alpha$ and $\sin^{-1}\frac{5}{13}=\beta$

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}\quad and\quad \sin\beta=\frac{5}{13}$$

$$\cos\alpha\frac{4}{5}\quad and\ \cos\beta=\frac{12}{13}$$

$$\cos\left\{\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}\right\}=\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{4}{5}\times\frac{12}{13}-\frac{3}{5}\times\frac{5}{13}=\frac{33}{65}$$

3. ఈ క్రిందివానిని నిరూపించండి.

i) $\cos\left[2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right]=\sin\left[2\tan^{-1}\frac{3}{4}\right]$

సాధన: $\tan^{-1}\frac{1}{7}=\alpha\Rightarrow\tan\alpha=\frac{1}{7}$

$$\cos2\alpha=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\frac{1}{49}}{1+\frac{1}{49}}=\frac{48}{50}=\frac{24}{25}$$

$$\tan^{-1}\frac{3}{4}=\beta\Rightarrow\tan\beta=\frac{3}{4}$$

$$\sin2\beta=\frac{2\tan\beta}{1+\tan^2\beta}=\frac{2\left[\frac{3}{4}\right]}{1+\frac{9}{16}}$$

$$=\frac{6}{4}\times\frac{16}{25}=\frac{24}{25}$$

www.sakshieducation.com

$$\therefore \cos 2\alpha = \sin 2\beta$$

$$\therefore \cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right) = \sin\left(2\tan^{-1}\frac{3}{4}\right)$$

ii) $\tan\left(2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)\right) = 2$

సాధన:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right) \Rightarrow \tan\alpha = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$= \frac{2\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)}{1-\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)}{4}} = \frac{\sqrt{5}-1}{\frac{4-(5+1)-2\sqrt{5}}{4}}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{4-6+2\sqrt{5}} = \frac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\sqrt{5}-2}$$

$$= \frac{4\left(\sqrt{5}-1\right)}{2\left(\sqrt{5}-1\right)} = 2$$

iii) $\cos\left\{2\left(\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{2}{9}\right)\right)\right\} = \frac{3}{5}$

$$\tan^{-1}\frac{1}{4} = \alpha = \tan\alpha = \frac{1}{4}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1-\frac{1}{16}}{1+\frac{1}{16}} = \frac{15}{17}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{2\left(\frac{1}{4}\right)}{1+\frac{1}{16}}$$

$$= \frac{2}{4} \times \frac{16}{17} = \frac{8}{17}$$

www.sakshieducation.com

$$\cos 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1+\tan^2\beta} = \frac{2\left(\frac{2}{9}\right)}{1+\frac{4}{81}}$$

$$= \frac{4}{9} \times \frac{\overset{9}{81}}{85} = \frac{36}{85}$$

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = \cos 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\alpha \sin 2\beta$$

$$= \left(\frac{15}{17}\right)\left(\frac{77}{85}\right) - \left(\frac{8}{17}\right)\left(\frac{36}{85}\right)$$

$$= \frac{1155}{1445} - \frac{288}{1445}$$

$$= \frac{867}{1445} = \frac{3}{5}$$

$$\therefore \cos\left\{2^{-}\left[\tan^{-1}\frac{1}{4} + \tan^{-1}\frac{2}{9}\right]\right\} = \frac{3}{5}$$

4. ఈ క్రింది వానిని నిరూపించండి.

(i) $Tan^{-1}\frac{1}{7} + Tan^{-1}\frac{1}{13} + Tan^{-1}\frac{2}{4} = 0$

(ii) $Tan^{-1}\frac{1}{2} + Tan^{-1}\frac{1}{5} + Tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

(iii) $Tan^{-1}\frac{3}{4} + Tan^{-1}\frac{3}{5} - Tan^{-1}\frac{8}{19} = \frac{\pi}{4}$

(iv) $Tan^{-1}\frac{1}{7} + Tan^{-1}\frac{1}{8} = \cot^{-1}\frac{201}{43} + \cot^{-1}(18)$

(i) సాధన:

Let $Tan^{-1}\frac{1}{7} = \alpha \quad Tan^{-1}\frac{1}{13} = \beta \quad Tan^{-1}\frac{2}{9} = \gamma$

$$Tan\alpha = \frac{1}{7} \quad Tan\beta\frac{1}{13} \quad Tan\gamma = \frac{2}{9}$$

www.sakshieducation.com

$$Tan(\alpha+\beta)=\frac{Tan\alpha+Tan\beta}{1-Tan\alpha Tan\beta}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{13}}{1-\frac{1}{91}}=\frac{\frac{20}{91}}{\frac{90}{91}}=\frac{2}{9}$$

$$Tan(\alpha+\beta-\gamma)=\frac{Tan(\alpha+\beta)-Tan\gamma}{1+Tan(\alpha+\beta)Tan\gamma}=\frac{\frac{2}{9}-\frac{2}{9}}{1+\frac{4}{8}}=0$$

$$\because \alpha+\beta-\gamma=0 \Rightarrow Tan^{-1}\frac{1}{7}+Tan^{-1}\frac{1}{13}-Tan^{-1}\frac{2}{9}=0$$

(ii)సాధన:

$$Tan^{-1}\frac{1}{2}+Tan^{-1}\frac{1}{5}+Tan^{-1}\left(\frac{1}{8}\right)$$

Let $Tan^{-1}\frac{1}{2}=\alpha \quad Tan^{-1}\frac{1}{5}=\beta \quad Tan^{-1}\frac{1}{8}=\delta$

$$Tan\alpha=\frac{1}{2} \quad Tan\beta=\frac{1}{5} \quad Tan\gamma=\frac{1}{8}$$

$$Tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{7}{9}$$

$$Tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\frac{7}{9}+\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{9}\times\frac{1}{8}}=\frac{56+9}{72}\times\frac{72}{72-7}=1$$

$$\alpha+\beta+\delta=\frac{\pi}{4}\Rightarrow Tan^{-1}\frac{1}{2}+Tan^{-1}\frac{1}{5}+Tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$$

(iii) సాధన:

$$Tan^{-1}\frac{3}{4}=\alpha \quad Tan^{-1}\frac{3}{5}=\beta \quad and\ Tan^{-1}\frac{8}{19}=\delta$$

$$Tan\alpha=\frac{3}{4} \quad Tan\beta=\frac{3}{5} \quad and\ Tan\delta=\frac{8}{19}$$

www.sakshieducation.com

$$Tan(\alpha+\beta)=\frac{\frac{3}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{9}{20}}=27 \Rightarrow Tan(\alpha+\beta-\delta)=\frac{Tan(\alpha+\beta)+Tan\delta}{1-Tan(\alpha+\beta)Tan\delta}$$

$$=\frac{\frac{27}{11}+\frac{8}{19}}{1+\frac{27}{11}\times\frac{8}{19}}=\frac{\frac{513-88}{209}}{\frac{209+216}{209}}=1$$

$$\because \alpha+\beta-\delta=\frac{\pi}{4}$$

(iv) సాధన:

$Tan^{-1}\frac{1}{7}=\alpha \quad Tan^{-1}\frac{1}{8}=\beta$ అనుకొనుము

$$Tan\alpha=\frac{1}{7} \quad and \; Tan\beta=\frac{1}{8}$$

$$Tan(\alpha+\beta)=\frac{Tan\alpha+Tan\beta}{1-Tan\alpha Tan\beta}=\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{50}}=\frac{15}{55}=\frac{3}{11}$$

LHS $\alpha+\beta=Tan^{-1}\frac{3}{11}=\cot^{-1}\left(\frac{11}{3}\right)$

Let $\cot^{-1}\frac{201}{43}=\delta \quad \cot^{-1}18=\delta$

$$\cot\delta=\frac{201}{43} \quad \cot\delta=18$$

$$\cot(\gamma+\delta)=\frac{\cot\gamma\cot\delta-1}{\cot\delta+\cot\gamma}=\frac{\frac{201\times18}{43}-1}{\frac{201}{43}}=\frac{\frac{3618-43}{43}}{\frac{201+774}{43}}$$

$$=\frac{3575}{975}=\frac{11}{3}$$

www.sakshieducation.com

$$\gamma+\delta=\cot^{-1}\frac{11}{3} \quad \because \text{LHS=RHS}$$

5. $Tan\left\{\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{2}{3}\right\}$ **విలువను కనుగొనుము.**

సాధన: $\cos^{-1}\frac{4}{5}=\alpha \quad and \quad \tan^{-1}\frac{2}{3}=\beta$

$$\cos\alpha=\frac{4}{5} \quad and \quad \tan\beta=\frac{2}{3}$$

$$Tan\alpha=\frac{3}{4} \quad and \quad \tan\beta=\frac{2}{3}$$

$$Tan\left\{\cos^{-1}\frac{4}{5}+\tan^{-1}\frac{2}{3}\right\}=Tan(\alpha+\beta)=\frac{Tan\alpha+Tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{3}{4}+\frac{2}{3}}{1-\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}}=\frac{\frac{17}{12}}{\frac{6}{12}}=\frac{17}{6}$$

6. $Tan\left\{\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right\}+Tan\left\{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{a}{b}\right\}=\frac{2b}{a}$ **అని నిరూపించండి.**

సాధన: $\cos^{-1}\frac{a}{b}=\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{a}{b}$

$$\text{L.H.S} \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{1+\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}}+\frac{1-\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan\frac{\alpha}{2}}=\frac{\left(1+\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2+\left(1-\tan\frac{\alpha}{2}\right)^2}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\frac{2\left\{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}\right\}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}=2\sec\alpha=\frac{2b}{a}$$

www.sakshieducation.com

iv) $\sin^{-1}x-\cos^{-1}x=\dfrac{\pi}{6}$ **అయితే x విలువను కనుక్కోండి.**

సాధన. $\alpha=\sin^{-1}x \Rightarrow \sin\alpha = x$

$\beta=\cos^{-1}x \Rightarrow \cos\beta = x$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\frac{\pi}{6}$$

$$\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}$$

$$(x)(x)-\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-x^2}=\frac{1}{2}$$

$$x^2-\frac{1}{2}=\sqrt{(1-x^2)(1-x^2)}$$

ఇరువైపుల వర్గం చేయగా

$$x^4+\frac{1}{4}-x^2=1-x^2-x^2+x^4$$

$$\frac{1}{4}=1-x^2$$

$$x^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

7. ఈ క్రింది వానిని సాధించండి.

1) $\tan\left\{2\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)\right\}=x$ అని చూపండి.

సాధన. $\tan\left\{2\tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)\right\}$

$$x=\tan\theta$$

$$=\tan\left\{2\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\tan^2\theta}-1}{\tan\theta}\right)\right\}$$

$$=\tan\left\{2\tan^{-1}\left(\frac{\sec\theta-1}{\tan\theta}\right)\right\}$$

$$=\tan\left\{2\tan^{-1}\left(\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\right\}$$

www.sakshieducation.com

$$= \tan\left\{2\tan^{-1}\left(\frac{2\sin^2\theta/2}{\sin\theta/2\cos\theta/2}\right)\right\}$$

$$= \text{ta}\left\{2\tan^{-1}\left(\tan\theta/2\right)\right\}$$

$$= \tan\left(2.\frac{\theta}{2}\right) = \tan\theta = x$$

2) $\sin\left[\cot^{-1}\frac{2x}{1-x^2} + \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right] = 1$ **అని చూపండి?**

$$\sin\left[\cot^{-1}\frac{2x}{1-x^2} + \cos^{-1}\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right]$$

$x = \tan\theta$

$$= \sin\left[\cot^{-1}\left(\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}\right)\right]$$

$$= \sin\left[\cot^{-1}2\theta\left(\tan 2\theta\right) + \cos^{-1}\left(\cos w\theta\right)\right]$$

$$= \sin\left[\cot^{-1}\left[\cot 90 - 2\theta\right] + \cos^{-1}\left(\cos 2\alpha\right)\right]$$

3) $\sin^{-1}\left[\frac{2p}{1+p^2}\right] - \cos^{-1}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right) = \tan^{-1}\left[\frac{2x}{1-x^2}\right]$,

అయితే $x = \frac{p-q}{1+pq}$ **అని చూపండి.**

$$\because \sin^{-1}\left(\frac{2p}{1+p^2}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{1-q^2}{1+q^2}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2x}{1-x^2}\right)$$

$p = \tan A, q = \tan B, x = \tan C$ **అనుకుంటే**

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\frac{2\tan A}{1+\tan^2 A}\right) - \cos^{-1}\left(\frac{1-\tan^2 B}{1+\tan^2 B}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}\right)$$

$$\Rightarrow \sin^{-1}\left(\sin 2A\right) - \cos^{-1}\left(\cos 2B\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\tan 2C\right)$$

www.sakshieducation.com

$\Rightarrow 2A - 2B = 2C$

$\Rightarrow A - B = C$

$\Rightarrow \tan^{-1} p - \tan^{-1} q = \tan^{-1}(x)$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{p-q}{1+pq}\right) = \tan^{-1}(x)$$

$$\Rightarrow x = \frac{p-q}{1+pq}$$

(4) $\sin^{-1}(1-x) + \sin^{-1} x = \cos^{-1} x$

సాధన: $\sin^{-1}(1-x) + \sin^{-1} x = \cos^{-1} x$

$\therefore \sin^{-1}(1-x) = \cos^{-1} x - \sin^{-1} x$

but $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x$

$$\sin^{-1}(1-x) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} x - \sin^{-1} x$$

$$(1-x) = \sin\left\{\frac{\pi}{2} - 2\sin^{-1} x\right\}$$

$\therefore (1-x) = \cos\left(2\sin^{-1} x\right)$

Let $\sin^{-1} x = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = x$

$\therefore 1 - x = \cos^2 \alpha$

$1 - x = 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow 1 - x = 1 - 2x^2$

$$2x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0 = \frac{1}{2}$$

8. $\alpha = Tan^{-1} \dfrac{\sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}$ **ఐతే** $x^2 = \sin^2\alpha$ **అని చూపుము.**

సాధన:

$$\tan\alpha \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\beta} = \frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}$$

$\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow$ ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

www.sakshieducation.com

$$\frac{\cos^2+\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2+\sin^2\alpha-2\cos\alpha\sin\alpha}+\frac{1+x^2}{1-x^2}\Rightarrow\frac{1+\sin 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$\frac{1+\sin 2\alpha+1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha-1+\sin 2\alpha}=\frac{1+x^2+1-x^2}{1+x^2-1+x^2}\Rightarrow\frac{2}{2\sin^2\alpha}=\frac{2}{2\sin^2}$$

$$\Rightarrow x^2=\sin 2\alpha$$

9. $2\sin^{-1}\frac{3}{5}-\cos^{-1}\frac{5}{13}=\cos^{-1}\left(\frac{323}{325}\right)$ **అని నిరూపించండి.**

Let $\sin^{-1}\frac{3}{5}=\alpha \qquad \cos^{-1}\frac{5}{13}=\beta$

$$\sin\alpha=\frac{3}{5} \qquad \cos\beta=\frac{5}{13}$$

$$\cos\alpha=\frac{4}{5} \qquad \sin\beta=\frac{12}{13}$$

$$\sin^2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{24}{25} \quad \cos^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

$$=1-2\left(\frac{9}{25}\right)=\frac{7}{25}$$

$$\cos(2\alpha-\beta)=\cos^2\alpha\cos\beta+\sin^2\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{7}{25}\times\frac{5}{13}+\frac{24}{25}\times\frac{12}{13}=\frac{35+288}{325}=\frac{323}{325}$$

(ii) సాధన:

$$\sin^{-1}\frac{4}{5}+2\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}$$

Let $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\alpha \quad \tan^{-1}\frac{1}{3}=\beta$

$$\sin\alpha=\frac{4}{5} \qquad \tan\beta=\frac{1}{3}$$

www.sakshieducation.com

$\cos\alpha = \frac{3}{5}$ $\qquad \sin^2\beta = \frac{2\tan\beta}{1+\tan^2\beta} = \frac{\frac{2}{3}}{1+\frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\times\frac{9}{10} = \frac{3}{5}$

$\cos^2\beta = \frac{4}{5}$

$\cos(\alpha+2\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{3}{4}\times\frac{4}{5} - \frac{4}{5}\times\frac{3}{5} = 0$

$\alpha + 2\beta = \frac{\pi}{2}$

(iii) $4\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{99} - \tan^{-1}\frac{1}{70} = \frac{\pi}{4}$ **అని నిరూపించండి.**

సాధన: $\tan^{-1}\frac{1}{5} = \alpha \qquad \tan^{-1}\frac{1}{99} = \beta \qquad \tan^{-1}\frac{1}{70} = \delta$

$\tan\alpha = \frac{1}{5} \qquad \tan\beta = \frac{1}{99} \qquad \tan\delta = \frac{1}{70}$

$Tan2\alpha = \frac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}} = \frac{2}{5}\times\frac{25}{24} = \frac{5}{12} \qquad Tan4\alpha = \frac{2Tan2\alpha}{1-Tan^2 2\alpha} = \frac{2\times\frac{5}{12}}{1-\frac{25}{144}} = \frac{120}{119}$

$Tan(4\alpha+\beta) = \frac{Tan4\alpha + Tan\beta}{1-Tan4\alpha Tan\beta} = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{99}}{1-\frac{120}{119}\times\frac{1}{94}} = \frac{\frac{11880+119}{119\times 99}}{11781-120} = \frac{11999}{11661}$

$Tan(4\alpha+\beta-\delta) = \frac{Tan(4\alpha+\beta) - Tan\delta}{1+\tan(4\alpha+\beta)Tan\delta} = \frac{\frac{11999}{11661} - \frac{1}{70}}{1+\frac{11999}{11661}\times\frac{1}{70}} = \frac{828269}{828269} = 1$

$\therefore 4\alpha + \beta - \delta = \frac{\pi}{4} \qquad \therefore 4\tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{99} - \tan^{-1}\frac{1}{70} = \frac{\pi}{4}$

www.sakshieducation.com

10. $\cos^{-1}p+\cos^{-1}q+\cos^{-1}r=\pi$ **ఐతే** $p^2+q^2+r^2+2pqr=1$ **అని చూపుము.**

సాధన: $\cos^{-1}p=\alpha \quad \cos^{-1}q=\beta \quad \cos^{-1}r=\delta$

$p=\cos\alpha \quad q=\cos\beta \quad r=\cos\delta$

Given $\alpha+\beta+\gamma=\pi \qquad \cos(\alpha+\beta)=\cos(\pi-\gamma)$

$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\gamma=\cos\gamma$

$pq=-r+\sqrt{1-p^2}\,\sqrt{1-q^2} \Rightarrow pq+r=\sqrt{1-p^2}\,\sqrt{1-q^2}$

$p^2q^2+r^2+2pqr=1-p^2-q^2+p^2q^2 \Rightarrow p^2+q^2+r^2+2pqr=1$

11) a,b,c లు ఒకే గుర్తు గల విభిన్న శూన్యేతర వాస్తవ సంఖ్యలు

$\cot^{-1}\left(\frac{ab+1}{a-b}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{bc+1}{b-c}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{ca+1}{c-a}\right)=\pi$ **లేదా** 2π **అని చూపండి.**

$\because (a-b)+(b-c)+(c-a)=0$

$(a-b),(b-c),(c-a)$లన్నింటికీ ఒకే గుర్తు ఉండదు. రెండు సందర్భాలు వస్తాయి. పై మూడింటిలో

ఏవేని రెండు ధనాత్మకలు,ఒకటి ఋణాత్మకం,లేదా రెండు ఋణాత్మకాలు,ఒకటి ధనాత్మకం.

సందర్భం. i): $(a-b),(b-c)$లు ధనాత్మకలు

$(c-a)$ఋణాత్మకం అనుకోండి.

$\cot^{-1}\left(\frac{ab+1}{a-b}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$

$=\tan^{-1}a-\tan^{-1}b$

$\because (ab>0)$

$\cot^{-1}\left(\frac{bc+1}{b-c}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{b-c}{1+bc}\right)$

$=\tan^{-1}b-\tan^{-1}(\because bc>0)$

మరియు $\cot^{-1}\left(\frac{ca+1}{c-a}\right)=\pi+\tan^{-1}\left(\frac{c-a}{1+ca}\right)$

www.sakshieducation.com

$\pi + \left(\tan^{-1} c - \tan^{-1} a\right)$

$(\because c - a < 0)$

$\therefore \sum \cot^{-1}\left(\frac{ab+1}{a-b}\right) = \left(\tan^{1} a - \tan^{-1} b\right)$

$+\left(\tan^{-1} b - \tan^{-1} c - \tan^{-1} b\right)$

$+\left(\tan^{-1} c - \tan^{-1} a\right) = \pi$

సందర్భం.ii): $(a-b),(b-c)$లు

ఋణాత్మకాలు, $(c-a)$ధనాత్మకం

అప్పుడు $\cot^{-1}\left(\frac{ab+1}{a-b}\right) = \pi - \cot^{-1}\left(\frac{ab+1}{b-a}\right)$

$= \pi - \tan^{-1}\left(\frac{b-a}{1+ba}\right)$

$= \pi - \left(\tan^{-1} - \tan^{-1} a\right)$

ఇదే విధంగా

$\cot^{-1}\left(\frac{bc+1}{b-c}\right) = \pi - \cot^{-1}\left(\frac{bc+1}{c-b}\right)$

$= \pi - \tan^{-1}\left(\frac{c-b}{1+cb}\right)$

$= \pi - \left(\tan^{-1} c - \tan^{-1} b\right)$

$\cot^{-1}\left(\frac{ca+1}{c-a}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{c-a}{1+ca}\right)$

$= \tan^{-1} c - \tan^{-1}(a)$

$\therefore \sum \cot^{-1}\left(\frac{ab+1}{a-b}\right) = \pi - \left(\tan^{-1} b - \tan^{-1} a\right)$

$+\pi - \left(\tan^{-1} c - \tan^{-1} b\right)$

$+\left(\tan^{-1} c - \tan^{-1} a\right)$

$= 2\pi$

$\therefore \sum \cot^{-1}\left(\frac{ab+1}{a-b}\right) = \pi \ \ \text{(or)}\ \ 2\pi$

www.sakshieducation.com

12. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\pi$ ఐతే '$x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+z\sqrt{1-z^2}=2xyz$ అని చూపుము.

సాధన:

$\sin^{-1}x=\alpha \quad \sin^{-1}y=\beta \quad \sin^{-1}z=\gamma$ అనుకొనుము

$\sin\alpha=x \quad \sin\beta=y \quad \sin\gamma=z$

$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \alpha+\beta=\pi-\gamma$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma \; and \; \cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$

$x\sqrt{1-x^2}+y\sqrt{1-y^2}+z\sqrt{1-z^2}$

$\sin\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}+\sin\beta\sqrt{1-\sin^2\beta}+\sin\gamma\sqrt{1-\sin^2\gamma}$

$\frac{1}{2}\left[\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma\right] = \frac{1}{2}\left[2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin^2\gamma\right]$

$\frac{1}{2}\left[2\sin\gamma\cos(\alpha-\beta)+2\sin\gamma\cos\gamma\right]$

$\sin\gamma\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]=2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \;=2xyz$

13. **(i)** $Tan^{-1}x+Tan^{-1}y+Tan^{-1}z=\pi$ ఐతే $x+y+z=xyz$ అని చూపుము.

(ii) $Tan^{-1}x+Tan^{-1}y+Tan^{-1}z=\frac{\pi}{2}$ ఐతే $xy+yz+zx=1$ అని చూపుము.

సాధన:

$\tan^{-1}x=\alpha \quad \tan^{-1}y=\beta \quad \tan^{-1}z=\gamma$ అనుకొనుము

$x=Tan\alpha \quad y=Tan\beta \quad z=Tan\gamma$

Given $\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \alpha+\beta=\pi-x$

$Tan(\alpha+\beta)=Tan(\pi-\gamma)\Rightarrow \frac{Tan\alpha+Tan\beta}{1-Tan\alpha Tan\beta}=Tan\gamma$

$Tan\alpha+Tan\beta=-Tan\gamma+Tan\alpha Tan\beta Tan\gamma \Rightarrow Tan\alpha+Tan\beta+Tan\gamma \; Tan\alpha Tan\beta Tan\gamma$

$=x+y+z \;=xyz$

www.sakshieducation.com

(ii)సాధన:

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}-\gamma$$

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\cot\gamma \Rightarrow \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{1}{\tan\gamma}$$

$$\tan\alpha\tan\gamma+\tan\beta\tan\gamma=1-\tan\alpha\tan\beta$$

$$\tan\alpha\tan\beta+\tan\beta\tan\gamma+\tan\gamma\tan\alpha=1$$

$$xy+yz+zx=1$$

14. ఈ క్రింది సమీకరణాలను సాధించండి.

(i) $$Tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+Tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$$

సాధన: $Tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)=\alpha \qquad Tan^{-1}\frac{x+1}{x+2}=\beta$

$$Tan\alpha=\frac{x-1}{x-2} \qquad Tan\beta=\frac{x+1}{x+2}$$

$$\alpha+\beta=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{Tan\alpha+Tan\beta}{1-Tan\alpha Tan\beta}=1$$

$$\frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{(x^2-1)}{(x^2-4)}}=1 \Rightarrow \frac{(x-1)(x+2)+(x+1)(x-2)}{x^2-4-x^2+1}=1$$

$$\frac{x^2+x-2+x^2-x-2}{-3}=1 \Rightarrow 2x^2-4=-3$$

$$2x^2=1 \Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

www.sakshieducation.com

ii) $$Tan^{-1}\left(\frac{1}{2x+1}\right)+Tan^{-1}\left(\frac{1}{4x+1}\right)=Tan^{-1}\left(\frac{2}{x^2}\right)$$

సాధన:

$$Tan^{-1}\frac{1}{2x+1}=\alpha \Rightarrow \quad Tan\alpha=\frac{1}{2x+1}$$

$$Tan^{-1}\left(\frac{1}{4x+1}\right)=\beta \Rightarrow Tan\beta=\frac{1}{4x+1}$$

$$\alpha+\beta=Tan^{-1}\frac{2}{x^2}$$

$$\frac{Tan\alpha+Tan\beta}{1-Tan\alpha Tan\beta}=\frac{2}{x^2}$$

$$\frac{\frac{1}{2x+1}+\frac{1}{4x+1}}{1-\frac{1}{(2x+1)(4x+1)}}=\frac{2}{x^2}$$

$$\frac{4x+1+2x+1}{8x^2+6x+x-y}=\frac{2}{x^2}$$

$$6x^3+2x^2=16x^2+12x$$

$$6x^3-14x^2-12x=0$$

$$2x\{3x^2-7x-6\}=0$$

$$2x\{3x^2-9x+2x-6\}=0$$

$$2x(3x+2)(x-3)=0$$

$$1-\frac{5x^2}{4}=\frac{1}{4}-\frac{x^2}{2}\Rightarrow 1-\frac{1}{4}=\frac{5x^2}{4}-\frac{x^2}{2}$$

$$\frac{3}{4}=\frac{5x^2-2x^2}{4}\Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

www.sakshieducation.com

15 . ఈ క్రింది వానిని నిరూపించండి.

(i) $\tan\left\{arc\cos\frac{1}{x}\right\} = \sin\left\{arc\cot\frac{1}{2}\right\}$

Let $arc\cos\frac{1}{x}$ i.e $\cos\frac{1}{x} = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{x}$

$\cot^{-1}\frac{1}{2} = \beta \Rightarrow \quad \cot\beta = \frac{1}{2}$

$\therefore \tan\alpha = \sin\beta$

$\frac{1-x^2}{x^2} = \frac{4}{5}$

$\sqrt{x^2-1} = \frac{2}{v5} \Rightarrow x^2-1 = \frac{4}{5} \Rightarrow x^2 = \frac{9}{5} = x = \frac{3}{\sqrt{5}}$

$x = -\frac{3}{\sqrt{5}}$ సమికరణాన్ని తృప్తి పరచదు.

(v) $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \sin^{-1}(1-x) = \frac{\pi}{2} + 2\sin^{-1}x$

$(1-x) = \sin\left\{\frac{\pi}{2} + 2\sin^{-1}x\right\}$

$(1-x) = \cos\left(2\sin^{-1}x\right)$ Let $\sin^{-1}x = \alpha \Rightarrow x - \sin\alpha$

$1-x = \cos^2\alpha \Rightarrow 1-x = 1-2x^2$

$2x^2 - x = 0 \Rightarrow \ x(x-1) = 0 \Rightarrow x = 0 = \frac{1}{2}$

www.sakshieducation.com

16. $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y+\sin^{-1}z=\pi$ **ఐతే** $x^4+y^4+z^4+4x^2y^2z^2=2\{x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\}$ **అని చూపుము.**

సాధన:

$\sin^{-1}x=\alpha \quad \sin^{-1}y=\beta \quad \sin^{-1}z=\gamma$ అనుకొనుము

$\sin\alpha=x \quad \sin\beta=y \quad \sin\gamma=z$

$\alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \cos(\alpha+\beta)=\cos(\pi-\gamma)$

$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}-xy=-\sqrt{1-z^2}$

$\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}=xy-\sqrt{1-z^2}$

$(1-x)^2(1-y)^2=x^2y^2+1-z^2-2xy\sqrt{1-z^2}$

$1-x^2-y^2+x^2y^2=x^2y^2+1-z^2-2xy\sqrt{1-z^2}$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా $\quad z^2-x^2-y^2=-2xy\sqrt{1-z^2}$

$z^4+x^4+y^4-2x^2z^2+2x^2y^2-2y^2z^2=4x^2y^2(1-z)^2$

$x^4+y^4+z^4-4x^2y^2z^2=2x^2y^2+2y^2z^2+2x^2z^2$

17. $\cos^{-1}\frac{x}{a}+\cos^{-1}\frac{y}{b}=\alpha$ **ఐతే** $\frac{x^2}{az}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\alpha$ **అని చూపుము.**

$\cos^{-1}\frac{x}{a}=\theta \quad , \quad \cos^{-1}\frac{y}{b}=\phi$ అనుకొనుము

$\cos\theta=\frac{x}{a} \quad \cos\phi=\frac{y}{b}=\theta$

$\theta+\phi=\alpha$

$\cos(\theta+\phi)=\cos\alpha \Rightarrow \cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi$

$\frac{xy}{ab}-\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}=\cos\alpha$

www.sakshieducation.com

$$\frac{xy}{ab}-\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\ \sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}$$

ఇరుపైపులా వర్గం చేయగా

$$\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+\cos^2\alpha=\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

$$\frac{x^2y^2}{a^2b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha$$

$$\frac{x^2y^2}{a^2b^2}+\cos^2\alpha=1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2y^2}{a^2y^2}$$

$$\frac{x^2y^2}{a^2b^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=1-\cos^2\alpha$$

$$\therefore\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=1-\sin^2\alpha$$

sssssss

18. కింది సమీకరణాలను సాధించండి.

i) $Tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+Tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}.$

సాధన. $\tan^{-1}\left(\frac{x-1}{x-2}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{x+2}\right)=\frac{\pi}{4}$

$$\tan^{-1}\left[\frac{\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{x+2}}{1-\frac{x-1}{x-2}+\frac{x+1}{2}}\right]=\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{x^2+x-2+x^2-x-2}{x^2-4-x^2+1}=\tan\frac{\pi}{4}$$

$$\frac{2\left(x^2-2\right)}{-3}=1$$

$$x^2-2=-\frac{3}{2}$$

$$x^2=2-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$$

www.sakshieducation.com

$\therefore\ x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

ii) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{2x+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{4x+1}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{2}{x^2}\right)$.

సాధన.

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{2x+1}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{4x+1}\right) = \tan\left[\frac{2}{x^2}\right]$$

$$\Rightarrow \tan^{-1}\left(\frac{\left(\frac{1}{2x+1}\right)+\left(\frac{1}{4x+1}\right)}{1-\left(\frac{1}{2x+1}\right)\left(\frac{1}{4x+1}\right)}\right)$$

$$= \tan^{-1}\left(\frac{2}{x^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{(4x+1)+(2x+1)}{(2x+1)(4x+1)-1} = \frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{6x+2}{8^{x^2}+6x+1-1} = \frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \frac{2(3x+1)}{2x(4x+3)} = \frac{2}{x^2}$$

$$\Rightarrow x^2(3x+1) = 2x(4x+3)$$

$$\Rightarrow x\left[x(3x+1)-2(4x+3)\right] = 0$$

$\Rightarrow x = 0$ **(లేదా)** $3x^2 - 7x - 6 = 0$

$\Rightarrow x = 0$ **(లేదా)** $3x^2 - 9x + 2x - 6 = 0$

$\Rightarrow x = 0$ **(లేదా)** $3x(x-3) + 2(x-3) = 0$

$\Rightarrow x = 0$ **(లేదా)** $(3x+2)(x-3) = 0$

$\Rightarrow x = 0,$ **(లేదా) 3 (లేదా)** $\frac{-2}{3}$

www.sakshieducation.com

19. కింది సమీకరణాలను సాధించండి.

i. $\cot^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\frac{1}{2}\cot^{-1}\left(\frac{1}{x}\right), x>0, x\neq 1$.

సాధన. $\cot^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\alpha=\cot\alpha=\frac{1+x}{1-x}$

$$\cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}=\frac{\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2-1}{2\left(\frac{1+x}{1-x}\right)}$$

$$=\frac{(1+x)^2-(1-x^2)^2}{2(1+x)(1-x)}=\frac{4x}{2(1-x^2)}$$

$$\therefore \cot^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Rightarrow\frac{1}{2}\cot^{-1}\frac{1}{x}$$

$$2\cot^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\cot^{-1}\frac{1}{x}$$

$$\cot 2\alpha=\frac{4x}{2(1-x^2)}=\frac{1}{x}$$

$$2x^2=1-x^2$$

$$3x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

ii) $\cos^{-1}\left(\sqrt{3}.x\right)+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$.

సాధన. $\alpha=\cos^{-1}\left(\sqrt{3x}\right)$

$\Rightarrow \cos\alpha=\sqrt{3x}$ అనుకుందాం.

$\beta=\cos^{-1}x\Rightarrow\cos\beta=x$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\frac{\pi}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=0$$

$$\left(\sqrt{3x}\right)x-\left(\sqrt{1-3x^2}\right)\left(\sqrt{1-x^2}\right)=0$$

$$\sqrt{3x^2}=\sqrt{(1-3x^2)(1-x^2)}$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$3x^4=1-x^2-3x^2+3x^4$$

$$0=1-4x^2$$

$4x^2 = 1 \qquad x = \frac{1}{2}$

iii) $\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \cos^{-1} x\right) = 1$.

సాధన. $\sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) + \cos^{-1}(x) = \sin^{-1}(1) = \frac{\pi}{2}$

let $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{5}$

$\beta = \cos^{-1} x \Rightarrow \cos\beta = x$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos\frac{\pi}{2}$

$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = 0$

$\left(\sqrt{1 - \frac{1}{25}}\right) \times \frac{1}{5}\sqrt{1 - x^2} = 0$

$\frac{\sqrt{24}}{5} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{5}$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$24x^2 = 1 - x^2$

$25x^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{25} \Rightarrow x = \frac{1}{5}$

iv) $\sec^2\left(\cot^{-1} 3\right) + \operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1} 2\right)$.

సాధన. $\cot^{-1}(3) = \alpha, \tan^{-1}(2) = \beta$ **అనుకుంటే**

$\cot\alpha = 3, \tan\beta = 2$

$\Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{3}, \cot\beta = \frac{1}{2}$

ఇప్పుడు $\sec^2\left(\cot^{-1} 3\right) + \operatorname{cosec}^2\left(\tan^{-1} 2\right)$

$= \sec^2\alpha + \operatorname{cosec}^2\beta$

$= \left(1 + \tan^2\alpha\right) + \left(1 + \cot^2\beta\right)$

$= 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$= 2 + \frac{1}{9} + \frac{1}{4}$

$= \frac{72 + 4 + 9}{36} = \frac{85}{36}$

www.sakshieducation.com

v) $\cot^{-1}\frac{1}{2}+\cot^{-1}\frac{1}{3}$ **విలువ కనుక్కోండి.**

సాధన. $\cot^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\cot^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$

$=\tan^{-1}(2)+\tan^{-1}(3)$

$\because \quad x=3, y=2, xy>1$

$=\pi+\tan^{-1}\left(\frac{2+3}{1-(2)(3)}\right)$

$=\pi+\tan^{-1}\left(\frac{5}{-5}\right)$

$=\pi+\tan^{-1}(-1)$

$=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

19. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{7}{25}=\sin^{-1}\frac{117}{125}$ **అని చూపండి.**

సాధన. మొదటి పద్ధతి.

$\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{7}{25}=\beta$ అనుకుంటే

అప్పుడు $\sin\alpha=\frac{4}{5}, \sin\beta=\frac{7}{25},$

$\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha, \cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$=\frac{3}{5}.\frac{24}{25}-\frac{4}{5}.\frac{7}{25}$

$=\frac{72-28}{125}=\frac{44}{125}>0$

$\Rightarrow(\alpha+\beta)\in\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

www.sakshieducation.com

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$= \frac{4}{5}.\frac{24}{25} + \frac{3}{5}.\frac{7}{25}$

$= \frac{96+21}{125} = \frac{117}{125}$

$\Rightarrow \alpha + \beta = \sin\left(\frac{117}{125}\right)$

$\therefore \sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{7}{25}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{117}{125}\right)$

20. $\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} + \sin^{-1}\left(\frac{16}{25}\right) = \frac{\pi}{2}$ **అని రుజువు చేయండి.**

సాధన. $\sin^{-1}\frac{4}{5} = \alpha \sin^{-1}\frac{5}{13} = \beta$ అనుకుంటే

α, β అల్పకోణాలు

$\sin\alpha = \frac{4}{5}, \sin\beta = \frac{5}{13}$

కనుక $\cos = \frac{3}{5}, \cos\beta = \frac{12}{3}$

ఇప్పుడు

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha + \cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$= \frac{3}{5}.\frac{12}{13} - \frac{4}{5}.\frac{5}{13}$

$= \frac{16}{65}$

$\therefore \alpha + \beta = \cos^{-1}\left(\frac{16}{25}\right)$

$\Rightarrow \sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13} = \cos^{-1}\left(\frac{16}{65}\right)$.......(1)

L.H.S

$= \left(\sin^{-1}\frac{4}{5} + \sin^{-1}\frac{5}{13}\right) + \sin^{-1}\left(\frac{16}{65}\right)$

$= \cos^{-1}\frac{16}{65} + \sin^{-1}\frac{16}{65} = \frac{\pi}{2}$ [(1) నుండి.]

L.H.S = R.H.S

www.sakshieducation.com

21) $\cot^{-1}9+\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{41}}{4}=\frac{\pi}{4}$ **అని రుజువు చేయండి.**

సాధన. $\cot^{-1}(9)=\alpha, \operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{41}}{4}=\beta$ అనుకుంటే

$\cot\alpha=9, \operatorname{cosec}\beta=\frac{\sqrt{41}}{4}$ అవుతాయి.

$\Rightarrow \tan\alpha=\frac{1}{9}, \cot\beta=\sqrt{\operatorname{cosec}^2\beta-1}$

$=\sqrt{\frac{41}{16}-1}=\sqrt{\frac{25}{16}}=\frac{5}{4}$

కనుక $0<\alpha,\beta<\frac{\pi}{2}$

$\therefore \tan\alpha=\frac{1}{9}\tan\beta=\frac{4}{5}$

ఇప్పుడు $\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$

$$=\frac{\frac{1}{9}+\frac{4}{5}}{1-\left(\frac{1}{9}\right)\left(\frac{4}{5}\right)}$$

$$=\left(\frac{5+36}{45-4}\right)=1$$

$\Rightarrow \tan(\alpha,\beta)=\tan\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \cot^{-1}(9)+\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{\sqrt{41}}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$

www.sakshieducation.com

22. $\tan\left(\left(2\tan^{-1}\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right)$ విలువను కనుక్కోండి.

సాధన. $\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)=\alpha$, అనుకుంటే $\tan\alpha=\frac{1}{5}$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{2\left(\frac{1}{5}\right)}{1-\left(\frac{1}{5}\right)^2}$$

$$=\frac{2}{5}\times\frac{25}{24}=\frac{5}{12}$$

ఇప్పుడు $\tan\left(2\tan^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\frac{\tan 2\alpha-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan 2\alpha\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\frac{5}{12}-1}{1+\left(\frac{5}{12}\right)(1)}=\frac{-7}{17}$$

23. $\sin^{-1}\frac{4}{5}+2\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}$ **అని రుజువు చేయండి.**

సాధన. $\sin^{-1}\left(\frac{4}{5}\right)=\alpha, \tan^{-1}\frac{1}{3}=\beta$ అనుకుంటే

అప్పుడు $\sin\alpha=\frac{4}{5}, \tan\beta=\frac{1}{3}$ అవుతాయి.

ఇప్పుడు $\tan 2\beta=\frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$

$$=\frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{3}\times\frac{9}{8}=\frac{3}{4}$$

$$\therefore \tan 2\beta=\frac{3}{4}$$

www.sakshieducation.com

$$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin^{-1}\frac{4}{5} + 2\tan^{-1}\frac{1}{5}$$

$$\therefore 2\beta = \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \Rightarrow 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \cos^{-1}\frac{4}{5}$$

$$\therefore \sin^{-1}\frac{4}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{5}$$

$$= \sin^{-1}\frac{4}{5} + \cos^{-1}\frac{4}{5} = \frac{\pi}{2}$$

24. $\cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right) = \sin\left(4\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$ అని రుజువు చేయండి.

సాధన. $\tan^{-1}\frac{1}{7} = \alpha, \tan^{-1}\frac{1}{3} = \beta$ అనుకుంటే

అప్పుడు $\tan\alpha = \frac{1}{7}, \tan\beta = \frac{1}{3}$

$$\text{L.H.S} = \cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)$$

$$= \cos\left(2ga = \frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}\right) = \frac{1-\left(\frac{1}{7}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{7}\right)^2}$$

$$= \frac{48}{50} = \frac{24}{25} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\because \tan\beta = \frac{1}{3} \Rightarrow \tan 2\beta = \frac{2\tan\beta}{1-\tan^2\beta}$$

$$= \frac{2\left(\frac{1}{3}\right)}{1-\frac{1}{9}} = \frac{2}{3}\times\frac{9}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\text{R.H.S} = \sin\left(4\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)$$

$$= \sin(4\beta)$$

$$= \sin(2\times 2\beta)$$

www.sakshieducation.com

$$= \frac{2\tan(2\beta)}{1+\tan^2 2\beta}$$

$$= \frac{2\times\frac{3}{4}}{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2} = \frac{6}{4}\times\frac{16}{25} = \frac{24}{25} \text{..............(2)}$$

(1), (2)

$$\sin\left(4\tan^{-1}\frac{1}{3}\right) = \cos\left(2\tan^{-1}\frac{1}{7}\right)$$

25. $\cos^{-1}\frac{P}{a} + \cos^{-1}\frac{b}{a} = \alpha$, **అయితే** $\frac{p^2}{a^2} - 2\frac{pq}{ab}\cos\alpha + \frac{q^2}{b^2} = \sin^2\alpha$ **అని రుజువు చేయండి.**

సాధన. $\cos^{-1}\frac{P}{a} = \alpha, \cos^{-1}\frac{q}{b} = \beta$ **అనుకుంటే**

$$\cos\alpha = \frac{p}{a}, \cos\beta = \frac{q}{b}$$

$A+B=\alpha$ **అవుతాయి**

ఇప్పుడు

$$\cos\alpha = \cos(A+B)$$

$$= \cos A\cos B - \sin A\sin B$$

$$= \frac{p}{a}.\frac{q}{b} - \sqrt{1-\frac{p^2}{a^2}}\sqrt{1-\frac{q^2}{b^2}} = \left(\frac{pq}{ab} - \cos x\right)$$

ఇరువైపులా వర్గం చేయగా

$$\left(1-\frac{p^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{q^2}{b^2}\right) = \frac{p^2q^2}{a^2b^2} - \frac{2pq}{ab}\cos\alpha + \cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} = \frac{p^2q^2}{a^2b^2} = \frac{p^2q^2}{a^2b^2} - \frac{2pq}{ab}$$

$$\cos\alpha + \cos^2\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} - \frac{2pq}{ab}\cos\alpha = 1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$$

$$\therefore \frac{p^2}{a^2} - 2\frac{pq}{ab}\cos\alpha + \frac{a^2}{b^2} = \sin^2\alpha$$

www.sakshieducation.com

26. $\sin\left[2\cos^{-1}\left\{\cot\left(2\tan^{-1}x\right)\right\}\right]=0$, **అయితే x అనుకుంటే.**

సాధన: $\sin\left[2\cos^{-1}\left\{\cot\left(2\tan^{-1}x\right)\right\}\right]=0$

$\Leftrightarrow 2\cos^{-1}\left[\cot\left(2\tan^{-1}x\right)\right]=0$ **లేదా** π **లేదా** 2π

$\cos^{-1}$ x యొక్క వ్యాప్తి $[0,\pi]$ కనుక

$\Leftrightarrow \cos^{-1}\left[\cot\left(2\tan^{-1}x\right)\right]=0$ **లేదా** $\frac{\pi}{2}$ **లేదా** π

$\Rightarrow \cot\left(2\tan^{-1}x\right)=1 \quad 0 \quad -1$

$\Rightarrow 2\tan^{-1}x \pm\frac{\pi}{4} \quad \pm\frac{\pi}{2} \quad \pm\frac{3\pi}{8}$

$\therefore \tan^{-1}(x)=\pm\frac{\pi}{8} \quad \pm\frac{\pi}{4} \quad \pm\frac{3\pi}{8}$

$x=\pm\left(\sqrt{2}-1\right) \quad \pm1 \quad \pm\left(\sqrt{2}+1\right)$

27. $\cos\left[\tan^{-1}\left\{\sin\left(\cot^{-1}x\right)\right\}\right]=\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+2}}$ **అని నిరూపించండి.**

సాధన. $\cot^{-1}(x)=\theta$ **అనుకుందాం**

అప్పుడు $\cot\theta=x, 0<x<\pi$

కనుక $\sin\left(\cot^{-1}x\right)=\sin\theta=\frac{1}{\cos ec\theta}$

$=\frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

$(\because 0<\theta<\pi)$

ఇప్పుడు

$\tan^{-1}\left(\sin\cot^{01}x\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\alpha$

అనుకుందాం

అప్పుడు $\tan\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ **అవుతుంది**

$\therefore \cos\left[\tan^{-1}\left\{\sin\left(\cot^{-1}x\right)\right\}\right]=\cos\alpha$

$=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$

www.sakshieducation.com

$$= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{1+x^2}}} = \sqrt{\frac{1+x^2}{2+x^2}}$$

www.sakshieducation.com